ДИФФЕРЕНЦІАЛЬНАЯ ГЕОМЕТРІЯ

ЛЕКЦІИ

ЧИТАННЫЯ

ВЪ МОСКОВСКОМЪ УНИВЕРСИТЕТѢ

проф. Д. ЕГОРОВЫМЪ.

Изд. Студ. Ф. Волошинымъ.

МОСКВА—1907.

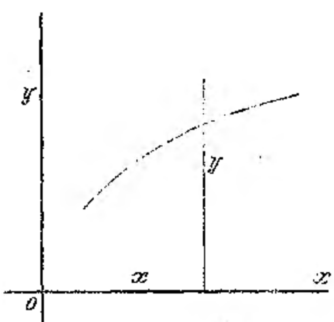
Т-ВО ТИПОГРАФІИ А. И. МАМОНТОВА ВЪ МОСКВѢ
Леонтьевскій пер., д. № 5.

Дифференціальная геометрія занимается изученіемъ свойствъ геометрическихъ формъ съ помощью методовъ анализа безконечно-малыхъ.

Глава I.

ТЕОРІЯ ПЛОСКИХЪ КРИВЫХЪ.

1. Какъ извѣстно изъ аналитической геометріи, произвольная плоская линія (черт. 1) въ Декартовыхъ прямоугольныхъ координатахъ X, Y, опредѣляется однимъ ур-іемъ, которое можемъ предполагать или разрѣшеннымъ относительно y :



Черт. 1

$$y = f(x) \qquad \ldots\ldots\ldots (1).$$

или въ видѣ :

$$F(x,y) = 0 \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots (2).$$

Возможно также опредѣлить плоскую кривую двумя ур-іями; именно, координаты X и Y точекъ кривой могутъ быть выражены въ функціи произвольнаго параметра t :

$$\left.\begin{aligned} x &= \varphi(t) \\ y &= \psi(t) \end{aligned}\right\} \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots (3).$$

-.-.-.-.-.-.-.-.-

Исключая изъ ур-iя (3) параметръ t возвращаемся къ одному ур-iю вида (2).

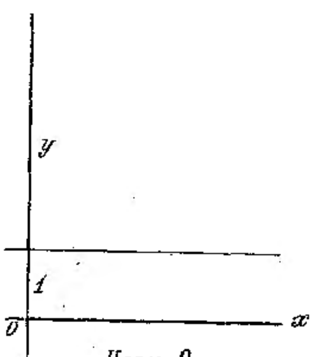
Геометрическiя мѣста точекъ, координаты которыхъ удовлетворяютъ уравненiямъ вида (1), (2) и (3), принято называть линiями, каковы бы ни были функцiи f, F, φ, ψ, входящiя въ соотвѣтствующiя ур-iя; но слѣдуетъ замѣтить, что при полномъ произволѣ упомянутыхъ функцiй, мы можемъ придти къ геометрическимъ мѣстамъ, совершенно не соотвѣтствующимъ тому непосредственному представленiю, которое мы имѣемъ о линiи, какъ о геометрической формѣ одного измѣренiя.

Такъ положимъ, что функцiя $f(x)$ (1) опредѣляется условiями.

f(X) = 1 , при (X) рацiональномъ

и f(X) = 0 , при (X) иррацiональномъ

и разсмотримъ ур-iе $y = f(x)$ относительно прямоугольной Декартовой системы координатъ X и У.



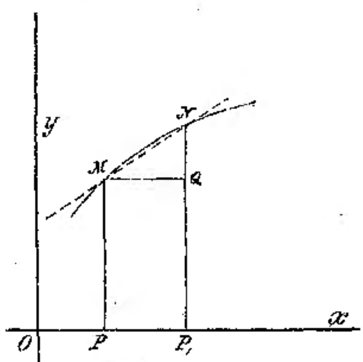
Черт. 2

Легко видѣть, что геометрическое мѣсто, опредѣляемое нашимъ ур-iемъ состоитъ (черт. 2) изъ совокупности точекъ съ рацiональными абсциссами на прямой параллельной оси X и отстоящей отъ нея на разстоянiи = 1, и изъ совокупности точекъ съ иррацiональными абсциссами на оси X ; такимъ образомъ непрерывной линiи мы не получаемъ.

Функцiя f(X), разсмотрѣнная нами въ предыдущемъ примѣрѣ, при непрерывномъ измѣненiи перемѣннаго (X), измѣняется скачками. Для того, чтобы кривая, опредѣляемая ур-іями (1), (2) или (3), была непрерывна, приходится устранить изъ разсмотрѣнія функціи, подобныя выше приведенной и наложить на функціи f, $\mathcal{F}$, φ и ψ входящія въ ур-ія (1), (2) и (3), нѣкоторое ограниченіе, а именно потребовать, чтобы эти функціи были функціи НЕПРЕРЫВНЫЯ.

Но одного этого ограниченія еще недостаточно: такъ, кривая, опредѣляемая ур-іемъ $y = f(x)$ можетъ не имѣть опредѣленной касательной ни въ одной изъ своихъ точекъ, хотя бы $f(X)$ была функціей непрерывной.

Дѣйствительно, тангенсъ угла, образованнаго осью абсциссъ сѣкущей (черт. 3), которая соединяетъ точку съ безконечно-близкой точкой $x + \Delta x$, $y + \Delta y$ на данной кривой, равенъ отношенію $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ (ср. ниже § 5) и слѣдовательно для существованія касательной въ точкѣ X, У необходимо, чтобы $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ стремилось къ опредѣленному предѣлу для $\Delta x = 0$, другими словами, чтобы функція $y = f(x)$ имѣла опредѣленную производную $\frac{dy}{dx} = f'(x) = \lim\limits_{\Delta x = 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}$. для разсматриваемаго значенія X.



Черт. 3

Между тѣмъ, непрерывная функція можетъ не имѣть производной ни для какого значенія X (одинъ изъ первыхъ примѣровъ подобной функціи былъ данъ Weierstrass'омъ).

Такимъ образомъ мы убѣждаемся въ необходимости наложить еше нѣкоторыя ограниченія на функціи f , $\mathcal{F}$, φ , ψ ,входящія въ наши уравненія, а прежде всего, мы должны потребовать, чтобы эти функціи были ДИФФЕРЕНЦИРУЕМЫ, т,е. допускали бы опредѣленныя производныя для всѣхъ значеній перемѣнныхъ,за исключеніемъ, быть можетъ, лишь нѣкоторыхъ отдѣльныхъ, ОСОБЫХЪ значеній. Мы увидимъ, въ дальнѣйшемъ, что въ нѣкоторыхъ вопросахъ дифференціальной геометріи, намъ придется имѣть дѣло и съ производными второго и высшихъ порядковъ отъ функцій, и слѣдовательно придется допускать, что функція f , $\mathcal{F}$, φ , ψ имѣютъ производныя 2-го и высшихъ порядковъ.

Если функція допускаетъ производныя сколь угодно высшаго порядка, то въ области любого значенія перемѣннаго(за исключеніемъ лишь особыхъ значеній),она разложима въ конечный рядъ Taylor'a(Тейлора) съ остаточнымъ членомъ;напр.:

$$f(x_0+h)=f(x_0)+\frac{h}{1}f'(x_0)+\frac{h^2}{1.2}f''(x_0)+\ldots+\frac{h^n}{n!}+\mathcal{R}_{n+1} \qquad (A)$$

Если мы кромѣ того потребуемъ,чтобы остаточный членъ ($\mathcal{R}_{n+1}$) стремился къ нулю съ повышеніемъ порядка (n) послѣдней производной, входящей въ наше разложеніе, то функція будетъ допускать разложеніе въ безконечный рядъ Taylor'a въ области любого значенія перемѣннаго (за исключеніемъ лишь, можетъ быть, особыхъ значеній); такого рода функціи называются АНАЛИТИЧЕСКИМИ, и кривыя, опредѣляемыя ур-іями (1) или (2), или(3), въ которыхъ f , $\mathcal{F}$, φ , ψ - аналитическія функціи, будемъ называть АНАЛИТИЧЕСКИМИ КРИВЫМИ.

Аналитическимъ кривымъ принадлежатъ всѣ тѣ свойства, которыя мы связываемъ съ нашимъ непосредственнымъ представленіемъ о линіяхъ: аналитическая кривая, какъ это явствуетъ изъ предыдущаго, НЕПРЕРЫВНА и во всякой точкѣ (за исключеніемъ, быть можетъ, нѣкоторыхъ особыхъ исключительныхъ точекъ), имѣетъ опредѣленную касательную, наконецъ, какъ доказывается въ интегральномъ исчисленіи, всякій отрѣзокъ аналитической кривой имѣетъ опредѣленную длину и ограничиваетъ вмѣстѣ съ подходяще выбранными прямолинейными отрѣзками, опредѣленную ПЛОЩАДЬ.

Въ дальнѣйшемъ мы будемъ всегда предполагать, что функціи f или F или φ и ψ , входящія въ уравненія (1) или (2) или (3), суть функціи непрерывныя и допускаютъ непрерывныя производныя перваго порядка. Кромѣ того изъ самаго хода разсужденій всегда будетъ ясно, какія допущенія мы еще дѣлаемъ въ каждомъ частномъ случаѣ.

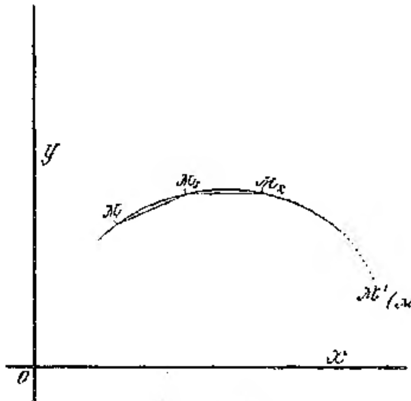
1. ДЛИНА КРИВОЙ ЛИНІИ; ДИФФЕРЕНЦІАЛЪ ДУГИ ПЛОСКОЙ КРИВОЙ

Пусть имѣемъ линію(черт. 4), опредѣляемую двумя ур-іями.

$$x=\varphi(t)$$
$$y=\psi(t) \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (1).$$

Разсмотримъ двѣ точки кривой М и М , соотвѣтствующія значеніямъ параметра $t=t_0$ и $t=T$ и рядъ точекъ M_1, M_2.... ..... соотвѣтствующихъ ряду значеній $t=t_1$, t_2 .... t_{n-1} , заключающихся между t_0 и T ; будемъ для симметріи обозначать T черезъ t_n . Предположимъ, что при измѣненіи параметра t

отъ t_0 до $\mathcal{T} = t_n$ точка перемѣщается по кривой въ одномъ направленіи; въ такомъ случаѣ M_1, M_2, - ...., располагаются по дугѣ MM' между точками M и M' (она же M_n). Соединяемъ послѣдовательно прямыми линіями M съ M_1, M_1 съ M_2 и т.д.; тогда получаемъ ломаную $MM_1\ M_2\ \ldots\ M_n$, вписанную



Черт. 4

въ дугу кривой MM_n. Будемъ увеличивать число промежуточныхъ значеній t, такъ, чтобы длина каждаго звена ломаной MM_1, $M_1\ M_2$, и т.д. стремилась къ нулю; тогда, какъ сейчасъ покажемъ, длина всей ломаной будетъ стремиться къ опредѣленному предѣлу, который и принимаемъ за длину кривой MM'. Такимъ образомъ, длина дуги кривой есть тотъ предѣлъ къ которому стремится длина вписанной ломаной, при безграничномъ увеличеніи числа звеньевъ, если каждое звено при этомъ стремится къ нулю.

Называя координаты точки M_i черезъ X_i y_i, имѣемъ :

$$x_i = \varphi(t_i),\quad y_i = \psi(t_i) \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (2)$$

По извѣстной формулѣ аналитической геометріи, длина звена ломаной $\overline{M_i\ M_{i+1}}$ выражается слѣдующимъ образомъ :

$$\overline{M_i M_{i+1}} = \sqrt{(x_{i+1}-x_i)^2+(y_{i+1}-y_i)^2}$$

и слѣдовательно, длина всей ломаной

$$\mathcal{L} = \sum_{i=0}^{i=n-1} \sqrt{(x_{i+1}-x_i)^2+(y_{i+1}-y_i)^2} \qquad \ldots.(3)$$

Въ силу равенствъ (2)

$$x_{i+1}-x_i = \varphi(t_{i+1}) - \varphi(t_i)$$

или, по теоремѣ о конечномъ приращенiи функцiи,

$$x_{i+1}-x_i = (t_{i+1}-t_i)\varphi'(\tau_i) \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots(4)$$

гдѣ τ_i есть нѣкоторое значенiе параметра, заключающееся между t_i и t_{i+1} . Аналогично

$$y_{i+1}-y_i = (t_{i+1}-t_i)\,\psi'(\theta_i) \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots(5)$$

гдѣ $t_i \leq \theta \leq t_{i+1}$

Равенство (3), въ силу формулъ (4) и (5), принимаетъ видъ :

$$\mathcal{L} = \sum_{i=0}^{i=n-1} (t_{i+1}-t_i)\sqrt{\varphi'^2(\tau_i)+\psi'^2(\theta_i)} \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots(6)$$

Полагая

$$\sqrt{\varphi'^2(\tau_i)+\psi'^2(\theta_i)} - \sqrt{\varphi'^2(t_i)+\psi'^2(t_i)} = \varepsilon_i \qquad \ldots\ldots.(7)$$

имѣемъ :

$$\mathcal{L} = \sum_{i=0}^{i=n-1} (t_{i+1}-t_i)\sqrt{\varphi'^2(t_i)+\psi'^2(t_i)} + \sum_{i=0}^{i=n-1}(t_{i+1}-t_i)\varepsilon_i \qquad \ldots.(8)$$

Будемъ увеличивать число промежуточныхъ значенiй параметра такъ, чтобы разность $t_{i+1} - t_i$ каждыхъ двухъ смежныхъ значенiй стремилась къ нулю. При этомъ увеличивается число звеньевъ ломаной линiи и длина каждаго звена стремится къ нулю. Докажемъ, что при этомъ вторая сумма въ правой части равенства(8) т.е.

$$\sum_{i=0}^{i=n-1} (t_{i+1}-t_i)\varepsilon_i \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (9)$$

стремится къ нулю. Для этого лѣвую часть равенства (7) умножимъ и раздѣлимъ на сумму входящихъ въ него квадратныхъ радикаловъ ; въ результатѣ получимъ :

$$\varepsilon_i = \frac{\varphi'^2(\tau_i)+\psi'^2(\vartheta_i)-\varphi'^2(t_i)-\psi'^2(t_i)}{\sqrt{\varphi'^2(\tau_i)+\psi'^2(\vartheta_i)}+\sqrt{\varphi'^2(t_i)+\psi'^2(t_i)}} =$$

$$= \left[\varphi'(\tau_i)-\varphi'(t_i)\right]\cdot\frac{\varphi'(\tau_i)+\varphi'(t_i)}{\mathcal{R}+\mathcal{R}'} + \left[\psi'(\vartheta_i)-\psi'(t_i)\right]\cdot\frac{\psi'(\vartheta_i)+\psi'(t_i)}{\mathcal{R}+\mathcal{R}'},$$

гдѣ для сокращенія положено

$$\sqrt{\varphi'^2(\tau_i)+\psi'^2(\vartheta_i)} = \mathcal{R}$$

$$\sqrt{\varphi'^2(t_i)+\psi'^2(t_i)} = \mathcal{R}'$$

Подкоренное выраженіе въ радикалѣ $\mathcal{R}$, какъ сумма двухъ квадратовъ, болѣе каждаго изъ квадратовъ и слѣдовательно

$$\mathcal{R} > |\varphi'(\tau_i)|;$$

по той же причинѣ

$$\mathcal{R}' > |\varphi'(t_i)|$$

и слѣдовательно

$$|\varphi'(\tau_i)+\varphi'(t_i)| < \mathcal{R}+\mathcal{R}'$$

или

$$\left|\frac{\varphi'(\tau_i)+\varphi'(t_i)}{\mathcal{R}+\mathcal{R}'}\right| < 1$$

Аналогично убѣждаемся, что и вторая дробь

$$\frac{\psi'(\vartheta_i)-\psi'(t_i)}{\mathcal{R}+\mathcal{R}'},$$

входящая въ выраженіе (10), по абсолютной величинѣ менѣе единицы, а отсюда слѣдуетъ, что абсолютная величина $\mathcal{E}_i$ менѣе суммы абсолютныхъ величинъ двухъ разностей, которыя входятъ множителями при упомянутыхъ дробяхъ, т.е.

$$|\varepsilon_i| < |\varphi'(\tau_i) - \varphi'(t_i)| + |\psi'(\theta_i) - \psi'(t_i)| \quad \ldots\ldots\ldots (11).$$

Прежде, чѣмъ идти далѣе, напомнимъ основное свойство всякой функціи $f(x)$, непрерывной при измѣненіи X отъ x_0 до X. Свойство это можетъ быть формулировано слѣдующимъ образомъ: всегда возможно промежутокъ отъ x_0 до X разбить на столь малые промежутки, чтобы разность значеній функціи $f(x') - f(x'')$ для двухъ произвольныхъ значеній x' и x'' перемѣннаго, находящихся въ любом. изъ полученныхъ частныхъ промежутковъ была по абсолютной величинѣ менѣе произвольно заданнаго, сколь угодно малаго, числа. Мы предполагаемъ, что производныя $\varphi'(t)$, $\psi'(t)$ суть функціи непрерывныя; слѣдовательно, согласно предыдущему, мы всегда можемъ, вводя достаточное число промежуточныхъ значеній t_1, t_2, ... t_{n-1}, разбить промежутокъ отъ t_0 до T на столь малые частные промежутки t_0t_1, t_1t_2 ......, чтобы для любого значенія i имѣли мѣсто неравенства

$$|\varphi'(\tau_i) - \varphi'(t_i)| < \frac{\varepsilon}{2}, \quad |\psi'(\theta_i) - \psi'(t_i)| < \frac{\varepsilon}{2}, \quad \ldots\ldots (12)$$

гдѣ ε - произвольно-заданное, сколь угодно малое число. Сопоставляя неравенства (11) и (12), получаемъ:

$$|\varepsilon| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon,$$

а, слѣдовательно, возвращаясь къ суммѣ (9), имѣемъ:

$$\left|\sum_{i=0}^{i=n-1} (t_{i+1} - t_i)\varepsilon_i\right| \leq \sum_{i=0}^{i=n-1} (t_{i+1} - t_i) \cdot |\varepsilon_i| <$$

$$< \sum_{i=0}^{i=n-1} (t_{i+1} - t_i)\,\varepsilon = \varepsilon\,(t_1 - t_0 + t_2 - t_1 + t_3 - t_2 + \ldots + T - t_{n-1}) = \varepsilon\,(T - t_0) \ldots 13$$

Неравенство (13) показываетъ, что увеличивая число промежуточныхъ значенiй t_1 , t_2 ...., можно сдѣлать сумму (9) сколь угодно малой по абсолютной величинѣ, такъ какъ ε -произвольно - малое число, а разность (T - t_0) имѣетъ опредѣленное конечное значенiе. Такимъ образомъ, переходя къ предѣлу, въ предположенiи, что число промежуточныхъ значенiй возрастаетъ до безконечности, а разности двухъ смежныхъ значенiй стремятся къ нулю, имѣемъ :

$$\lim \sum_{i=0}^{i=n-1} (t_{i+1} - t_i)\,\varepsilon_i = 0 \qquad \ldots\ldots\ldots (14).$$

Въ томъ же самомъ предположенiи первая сумма во второй части равенства (8) стремится къ опредѣленному предѣлу, не зависящему отъ закона, по которому мы вводимъ промежуточныя значенiя t . Дѣйствительно, полагая

$$\sqrt{\varphi'^2(t) + \psi'^2(t)} = F(t), \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots (15)$$

представимъ эту сумму въ видѣ

$$\sum_{i=0}^{i=n-1} (t_{i+1} - t_i)\,F(t_i), \qquad \ldots\ldots\ldots (16)$$

а сумма подобнаго типа, въ силу основного положенiя интегральнаго исчисленiя, стремится къ опредѣленному предѣлу, не зависящему отъ закона разбiенiя промежутковъ; предѣлъ этотъ есть опредѣленный интегралъ.

$$\int_{t_0}^{T} F(t)\,dt.$$

Такимъ образомъ, мы доказали, что длина $\mathcal{L}$ вписанной ломаной линiи стремится къ опредѣленному предѣлу, который и прини-

маемъ за мѣру длины дуги MM' . Обозначая эту длину черезъ s , .
имѣемъ :

$$s = \lim \mathcal{L} = \lim \sum_{i=0}^{i=n-1} \sqrt{\varphi'^2(t_i)+\psi'^2(t_i)}\cdot(t_{i+1}-t_i) =$$

$$= \int_{t_0}^{T} \sqrt{\varphi'^2(t)+\psi'^2(t)}\cdot dt \qquad \text{...........(17).}$$

Пусть начало M дуги s остается неизмѣннымъ, а конецъ ея M' перемѣщается по данной кривой. Въ такомъ случаѣ t_0 остается неизмѣннымъ, а T измѣняется, и мы для удобства будемъ значенiе параметра, соотвѣтствующее концу дуги, обозначать не черезъ T , а черезъ t .При измѣненiи t измѣняется и длина s дуги MM' ; s есть нѣкоторая функцiя $s(t)$ значенiя параметра t , соотвѣтствующаго концу дуги, и производная этой функцiи по t , какъ производная опредѣленнаго интеграла по верхнему предѣлу, равна подъинтегральной функцiи. Такимъ образомъ :

$$\frac{ds}{dt} = \sqrt{\varphi'^2(t)+\psi'^2(t)} \qquad \text{........(18)}$$

или, такъ какъ изъ уравненiй кривой

$$\varphi'(t) = \frac{dx}{dt} = x', \quad \psi'(t) = \frac{dy}{dt} = y',$$

въ другомъ видѣ :

$$\frac{ds}{dt} = \sqrt{x'^2+y'^2} \qquad \text{.........(19)}$$

Умножая обѣ части на dt ,получаемъ дифференцiалъ дуги кривой :

$$ds = \sqrt{x'^2+y'^2}\cdot dt \qquad \text{...........(20).}$$

Равенства (19) и (2 0) содержатъ квадратный радикалъ.Подразумѣвая передъ нимъ знакъ $+$, какъ это tacite предполагалось во всѣхъ предидущихъ разсужденіяхъ, мы устанавливаемъ опредѣленнымъ образомъ положительное направленіе отсчета дугъ на данной кривой. Такъ какъ при этомъ знакъ ds совпадаетъ со знакомъ dt, то дуга s возрастаетъ съ возрастаніемъ t и слѣдовательно за положительное направленіе отсчета дугъ на кривой мы выбрали то направленіе, которое соотвѣтствуетъ в о з р а с т а н і ю параметра t.

Возводя обѣ части равенства (20) въ квадратъ и замѣняя произведенія производныхъ x', y' на дифференціалъ dt дифференціалами dx, dy, имѣемъ :

$$ds^2 = dx^2 + dy^2, \qquad \text{.................} (21)$$

откуда

$$ds = \pm\sqrt{dx^2 + dy^2}, \qquad \text{.............} (22)$$

при чемъ передъ радикаломъ приходится брать тотъ или иной изъ двухъ знаковъ въ соотвѣтствіи съ выше установленнымъ правиломъ, въ силу котораго знакъ ds долженъ совпадать со знакомъ dt Пусть данная кривая опредѣляется однимъ уравненіемъ вида

$$y = f(x) \qquad \text{..................} (23)$$

Оно, очевидно, эквивалентно двумъ равенствамъ

$$x = t, \quad y = f(t) \qquad \text{...............} (24)$$

и слѣдовательно дифференціалъ дуги получимъ изъ формулы (20), полагая лишь, что параметръ t совпадаетъ съ x. Такимъ образомъ будемъ имѣть :

$$ds = \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2} \cdot dx, \qquad \text{..........} (25)$$

при чемъ за положительное направленіе на кривой принимаемъ направленіе движенія точки, проэкція которой на ось X движется въ сторону возрастающихъ x - овъ.

Пусть теперь параметръ t въ частности совпадаетъ съ длиной дуги s ,отсчитываемой отъ даннаго начала M. Въ такомъ случаѣ

$$\frac{ds}{dt} = 1$$

и изъ общей формулы (19) получаемъ :

$$1 = \sqrt{x'^2 + y'^2}$$

откуда

$$x'^2 + y'^2 = 1 \qquad \text{.........(26)}$$

Дифференцируя это равенство по параметру s и дѣля на 2,имѣемъ кромѣ того

$$x' \cdot x'' + y' \cdot y'' = 0 \qquad \text{.......... (27)}$$

Если координаты x,y точекъ кривой выражены въ функціи какого-либо параметра t , не совпадающаго съ дугой s , то длина дуги s есть нѣкоторая функція t , какъ мы видѣли выше :

$$s = s(t) \qquad \text{........... (28)}$$

Отсюда обратно t есть функція s :

$$t = f(s)$$

и, внося это выраженіе въ уравненія

$$x = \varphi(t),\ y = \psi(t) \qquad \text{........ (1)}$$

кривой, мы получаемъ :

$$x = \varphi_1(s),\ y = \psi_1(s) \qquad \text{........ (29)}$$

т.е. выражаемъ координаты x, y въ функціи дуги s . Такимъ образомъ для произвольной кривой мы можемъ предположить пара -

метръ t совпадающимъ съ дугой s , т.е. ея уравненія въ видѣ (29).

Исключеніе имѣетъ мѣсто лишь въ томъ случаѣ, когда функція s (t) въ равенствѣ (28) обращается въ постоянное, ибо тогда нельзя обратно t выразить въ функціи s . Въ этомъ случаѣ производная $\frac{ds}{dt}$ тождественно равна нулю, откуда, въ силу равенства (19) слѣдуетъ, что для всѣхъ точекъ кривой

$$x'^2 + y'^2 = 0 \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(30)$$

или, по умноженію на dt^2:

$$dx^2 + dy^2 = 0 \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(31)$$

Очевидно, что подобное соотношеніе не можетъ имѣть мѣсто для дѣйствительной линіи, такъ какъ при дѣйствительныхъ значеніяхъ dx , dy лѣвая часть равенства (31) существенно положительна. Итакъ, возможны лишь мнимыя линіи, удовлетворяющія условію (30) или (31). Опредѣленіе этихъ линій (минимальныхъ линій) не представляетъ затрудненій:

Равенство (31) можетъ быть представлено въ видѣ

$$(dx + i\,dy)(dx - i\,dy) = 0,$$

откуда

$$dx + i\,dy = 0 \quad \text{или} \quad dx - i\,dy = 0$$

а изъ этихъ дифференціальныхъ соотношеній имѣемъ :

$$x + y = const. \text{ или } x - iy = const$$

Такимъ образомъ минимальныя линіи суть мнимыя прямыя ("абсолютнаго" направленія).

Ограничиваясь дѣйствительными линіями, можемъ ,слѣдовательно сказать, что координаты точекъ всякой линіи могутъ - быть выражены въ функціи дуги s .

Примѣръ. Данъ эллипсъ уравненіемъ :

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$$

Ур-іе это вполнѣ равносильно двумъ ур-іямъ вида :

$$x=a\sin\varphi$$
$$y=b\cos\varphi$$

гдѣ φ - произвольный параметръ.

Дифференцируя, имѣемъ :

$$dx=a\cos\varphi\, d\varphi$$
$$dy=-b\sin\varphi\, d\varphi$$

и слѣдовательно

$$ds=\sqrt{a^2\cos^2\varphi+b^2\sin^2\varphi}\, d\varphi=$$
$$=\sqrt{a^2-(a^2-b^2)\sin^2\varphi}\, d\varphi=a\sqrt{1-e^2\sin^2\varphi}\, d\varphi$$

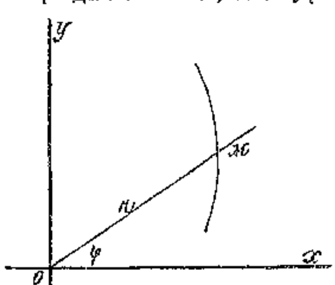
гдѣ $e=c:a$; $c=ea$; $c^2=a^2-b^2$:

2. ДИФФЕРЕНЦІАЛЪ ДУГИ ВЪ ПОЛЯРНЫХЪ КООРДИНАТАХЪ.

Предположимъ, что ур-іе кривой (черт. 5), дано въ полярныхъ координатахъ и имѣетъ видъ:

$$r=f(\varphi)\qquad\ldots\ldots(1)$$

гдѣ r - радіусъ векторъ, φ -полярный уголъ. Переходя къ прямоугольной Декартовой системѣ, для



Черт.5

которой полюсъ служитъ началомъ, а полярная ось – осью X, имѣемъ

$$x = r\cos\varphi, \quad y = r\sin\varphi \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (2)$$

и слѣдовательно, вставляя выраженіе r изъ ур-ія (1), получаемъ два ур-ія :

$$\begin{aligned} x &= f_1(\varphi)\cos\varphi \\ y &= f_1(\varphi)\sin\varphi \end{aligned} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (3)$$

опредѣляющія X и У въ функціи параметра φ .

Такимъ образомъ, мы можемъ примѣнить результаты предшествующаго параграфа и тогда получаемъ для дифференціала дуги выраженіе :

$$ds = \sqrt{x'^2 + y'^2}\, d\varphi \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (4)$$

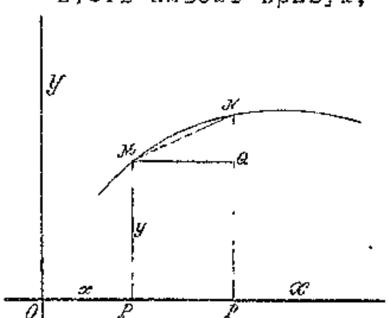
гдѣ X' и У'....производныя X и У по φ . Дифференцируя равенства (3) или, что безразлично, равенства (2) по φ ,имѣемъ:

$$\begin{aligned} x' &= r'\cos\varphi - r\sin\varphi \\ y' &= r'\sin\varphi + r\cos\varphi \end{aligned} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (5)$$

слѣдовательно $ds = \sqrt{r'^2 + r^2}\, d\varphi = \sqrt{dr^2 + r^2 d\varphi^2}$

3. КАСАТЕЛЬНАЯ.

Пусть имѣемъ кривую, опредѣляемую относительно прямоугольной Декартовой системы ур-іями:



Черт 6

$$x = \varphi(t)$$
$$y = \psi(t)$$

Разсмотримъ сѣкущую (черт. 6),проходящую черезъ точки кривой M и N , опредѣляемыя координатами x,y и

$x + \Delta x = \varphi(t + \Delta t),\ y + \Delta y = \psi(t + \Delta t)$

Обозначая текущія координаты точекъ сѣкущей черезъ X . Y, имѣемъ ур-іе сѣкущей (ур-іе прямой, проходящей черезъ двѣ точки):

$$\frac{X-x}{\Delta x} = \frac{Y-y}{\Delta y}$$

или, по умноженіи двухъ частей ур-ія на Δt

$$\frac{X-x}{\frac{\Delta x}{\Delta t}} = \frac{Y-y}{\frac{\Delta y}{\Delta t}}$$

Будемъ уменьшать приращеніе параметра Δt до нуля: точка N въ такомъ случаѣ неограниченно приближается къ M и сѣкущая приближается къ нѣкоторому предѣльному положенію; въ предѣлѣ для $\Delta t = 0$ имѣемъ :

$$\lim \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{dx}{dt} = x'$$

$$\lim \frac{\Delta y}{\Delta t} = \frac{dy}{dt} = y'$$

и предыдущее ур-іе принимаетъ видъ:

$$\frac{X-x}{x'} = \frac{Y-y}{y'} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (1)$$

Прямая, опредѣляемая этимъ ур-іемъ, есть та именно прямая, къ которой неограниченно приближается сѣкущая : она называется к а с а т е л ь н о й , точка M (x,y) - ея точкой прикосновенія.

Предыдущія разсужденія предполагаютъ, что въ разсматриваемой нами точкѣ кривой по крайней мѣрѣ одна изъ производныхъ

$$x' = \varphi'(t), \quad y' = \psi'(t)$$

отлична отъ нуля; въ противномъ случаѣ, т.е. если одновременно $x' = 0$ и $y' = 0$, касательная становится неопредѣленной, какъ это видно изъ ур-ія (1) или изъ равносильнаго ему ур-ія .

$$(Y-y)=\frac{y'}{x'}(X-x) \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ (2)$$

Точки, для которыхъ одновременно $x'=o$, $y'=o$ наз. о с о б ы м и точками кривой; мы впослѣдствіи будемъ сепціально говорить о нихъ ; пока же совершенно устраняемъ ихъ изъ разсмотрѣнія.

Обращаясь къ ур-iю (2), можемъ представить его въ видѣ:

$$Y=\frac{y'}{x'}X+\left(y-\frac{y'}{x'}x\right) \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots\ (3)$$

откуда заключаемъ, что

$$\frac{y'}{x'}=tg\tau \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots\ (4)$$

гдѣ τ - уголъ, образованный касательной съ осью абсциссъ. Изъ равенства (4) слѣдуетъ :

$$\cos\tau=\frac{x'}{\sqrt{x'^2+y'^2}},\ \sin\tau=\frac{y'}{\sqrt{x'^2+y'^2}} \ldots\ldots\ldots\ (5)$$

или, по умноженіи числителей и знаменателей на dt, получимъ:

$$\cos\tau=\frac{dx}{ds},\ \sin\tau=\frac{dy}{ds} \qquad \ldots\ldots\ldots\ (5)$$

Выбирая знакъ + передъ радикаломъ $\sqrt{x'^2+y'^2}$ въ формилахъ (5), мы этимъ устанавливаемъ положительное направленіе на касательной ; легко видѣть, что оно совпадаетъ съ положительнымъ направленіемъ на кривой въ смежности съ точкой прикосновенія

Въ самомъ дѣлѣ, $\cos\tau$ и $\sin\tau$ суть очевидно, предѣлы, къ которымъ стремятся выраженія

$$\frac{\frac{\Delta x}{\Delta t}}{+\sqrt{\left(\frac{\Delta x}{\Delta t}\right)^2+\left(\frac{\Delta y}{\Delta t}\right)^2}},\qquad \frac{\frac{\Delta y}{\Delta t}}{\sqrt{\left(\frac{\Delta x}{\Delta t}\right)^2+\left(\frac{\Delta y}{\Delta t}\right)^2}} \qquad \ldots\ldots\ldots\ (6).$$

для Δt = 0. Съ другой стороны, обращаясь къ уравненію сѣкущей, видимъ, что косинусъ и синусъ угла, образуемаго этой линіей съ осью X, равны

$$\frac{\Delta x}{+\sqrt{\Delta x^2+\Delta y^2}}\,, \qquad \frac{\Delta y}{+\sqrt{\Delta x^2+\Delta y^2}} \quad \ldots\ldots\ldots(7)$$

Притомъ знаки этихъ двухъ выраженій совпадаютъ со знаками приращеній Δx, Δy, которыя суть проэкціи отрѣзка MN (черт 6) на оси координатъ, и слѣдовательно за положительное направленіе сѣкущей мы при этомъ считаемъ направленіе отъ M къ N. Выраженія (6) и (7) совпадаютъ по абсолютной величинѣ; они совпадаютъ и по знаку, если приращеніе Δt положительно т.е. если точка N, по отношенію къ точкѣ M, лежитъ въ сторону возрастанія параметра t ; наоборотъ, знаки выраженій (7) противположны знакамъ выраженій (6), если N лежитъ по отношенію къ M въ сторону убыванія t. Отсюда слѣдуетъ, что выраженія (6) суть косинусъ и синусъ угла, образованнаго съ осью X тѣмъ направленіемъ сѣкущей, которое соотвѣтствуетъ направленію возрастанія t на кривой линіи; а такъ какъ $\cos\tau$ и $\sin\tau$ равны предѣламъ выраженій (6) для Δt =0, то положительное направленіе на касательной совпадаетъ съ положительнымъ направленіемъ на кривой въ смежности съ точкой прикосновенія.

Ур-іе касательной въ видѣ (3) особенно удобно въ тѣмъ случаѣ,когда кривая опредѣляется однимъ ур-іемъ вида :

$$y=f(x)$$

Въ такомъ случаѣ принимаемъ t = x и слѣдовательно

$$x'=1, \quad y-\frac{dy}{dx}$$

ур-іе (3) принимаетъ видъ:

$$Y=\frac{dy}{dx}X+\left(y-x\frac{dy}{dx}\right) \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(8)$$

Замѣтимъ между прочимъ, что выраженіе въ правой части заключенное въ скобки, т.е. $y-x\cdot\frac{dy}{dx}$ выражаетъ собой отрѣзокъ, отсѣкаемый касательной на оси у.

Если ур-іе дано въ неявной формѣ

$$F(x,y)=0,$$

то диференцируя его въ предположеніи, что у есть неявная функція х, имѣемъ :

$$\frac{\partial F}{\partial x}+\frac{\partial F}{\partial y}\cdot\frac{dy}{dx}=0$$

откуда

$$\frac{dy}{dx}=-\frac{\frac{\partial F}{\partial x}}{\frac{\partial F}{\partial y}}$$

Вставимъ это выраженіе въ ур-іе касательной (8), которое можемъ написать въ видѣ:

$$Y-y=\frac{dy}{dx}\cdot(X-x);$$

тогда получимъ:

$$Y-y=-\frac{\frac{\partial F}{\partial x}}{\frac{\partial F}{\partial y}}\cdot(X-x)$$

или

$$(Y-y)+\frac{\frac{\partial F}{\partial x}}{\frac{\partial F}{\partial y}}\cdot(X-x)=0$$

или

$$(X-x)\frac{\partial F}{\partial x}+(Y-y)\frac{\partial F}{\partial y}=0 \qquad \ldots(9)$$

Если кривая, опредѣляемая уравненіемъ

$$\mathcal{F}(x, y) = 0$$

есть алгебраическая, т.е. если $\mathcal{F}$ (x,y) есть многочленъ, степень котораго обозначимъ черезъ n , то уравненіе касательной принимаетъ особенно удобную форму при введеніи, такъ называемыхъ однородныхъ координатъ x_1 , x_2, x_3, связанныхъ съ Декартовыми координатами соотношеніями

$$x = \frac{x_1}{x_3} \quad , \quad y = \frac{x_2}{x_3}$$

вносяя въ многочленъ $\mathcal{F}$ (x , y) выраженія x, y черезъ x_1, x_2, x_3 и приводя къ общему знаменателю, имѣемъ

$$\mathcal{F}(x, y) = \frac{1}{x_3^n} \Phi(x_1, x_2, x_3),$$

гдѣ Φ (x_1, x_2, x_3) однородный многочленъ n - го измѣренія. Уравненіе кривой въ однородныхъ координатахъ принимаетъ видъ

$$\Phi(x_1, x_2, x_3) = 0,$$

при чемъ

$$\Phi(x_1, x_2, x_3) = x_3^n \cdot \mathcal{F}(x, y) \qquad \text{.......(10)}$$

Дифференцируя равенство (10) по x_1 и по x_2 и обозначая производныя Φ по аргументамъ x_1, x_2, x_3 черезъ Φ_1 , Φ_2 , Φ_3 , имѣемъ

$$\Phi_1 = x_3^{n-1} \cdot \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial x} \; , \quad \Phi_2 = x_3^{n-1} \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial y} \qquad \text{........(11)}$$

Отсюда обратно производныя

$$\frac{\partial \mathcal{F}}{\partial x} \quad , \quad \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial y}$$

выражаются черезъ Φ_1 и Φ_2 . Вносяя эти выраженія въ уравненіе (9) касательной и замѣняя Декартовы координаты отношеніями однородныхъ

$$x = \frac{x_1}{x_3}, \quad y = \frac{x_2}{x_3}, \quad X = \frac{X_1}{X_3}, \quad Y = \frac{X_2}{X_3}$$

получаемъ, по освобожденіи отъ знаменателя уравненіе касательной въ видѣ

$$\left(X_1 x_3 - X_3 x_1\right)\varphi_1 + \left(X_2 x_3 - X_3 x_2\right)\varphi_2 = 0 \qquad \ldots\ldots(12)$$

гдѣ X_1, X_2, X_3 - текущія координаты.

Такъ какъ φ - однородный многочленъ n - го измѣренія, то примѣняя къ нему теорему Эйлера, получаемъ тождество

$$x_1\varphi_1 + x_2\varphi_2 + x_3\varphi_3 = n\varphi,$$

Если x_1, x_2, x_3 - координаты точки кривой, то $\varphi = 0$, и мы имѣемъ :

$$x_1\varphi_1 + x_2\varphi_2 + x_3\varphi_3 = 0 \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots(13)$$

Умножая это равенство на X_3 , складывая съ уравненіемъ (12) касательной и сокращая результатъ на x_3 ,получаемъ окончательно уравненіе касательной въ видѣ:

$$\varphi_1 X_1 + \varphi_2 X_2 + \varphi_3 X_3 = 0 \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots(14)$$

П р и м ѣ р ъ 1. Выведемъ уравненіе касательной къ эллипсу

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

Въ однородныхъ координатахъ уравненіе принимаетъ видъ

$$\varphi(x_1, x_2, x_3) = \frac{x_1^2}{a^2} + \frac{x_2^2}{b^2} - x_3^2 = 0$$

Дифференцируя по x_1, X_2, X_3 ,имѣемъ :

$$\varphi_1 = \frac{2x_1}{a^2}, \quad \varphi_2 = \frac{2x_2}{b^2}, \quad \varphi_3 = -2x_3$$

и слѣдовательно уравненіе касательной будетъ :

$$\frac{x_1 X_1}{a^2} + \frac{x_2 X_2}{b^2} - x_3 X_3 = 0$$

Дѣля на $x_3 X_3$, получаемъ уравненіе въ Декартовыхъ координатахъ

$$\frac{x \cdot X}{a^2} + \frac{y Y}{b^2} = 1$$

Примѣръ 2. Выведемъ уравненіе касательной къ параболѣ :

$$Y^2 = 2px$$

Разрѣшая уравненіе относительно y, получаемъ два различныхъ значенія:

$$Y = +\sqrt{2p}\, X^{\frac{1}{2}} \text{ и } Y = -\sqrt{2p}\cdot X^{\frac{1}{2}}$$

Будемъ опредѣлять касательную въ точкѣ параболы, расположенной въ области положительныхъ y ; въ такомъ случаѣ мы должны взять

$$Y = +\sqrt{2p}\, X^{\frac{1}{2}}$$

Дифференцируя, имѣемъ :

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{2}\sqrt{2p}\, X^{-\frac{1}{2}} = \sqrt{\frac{p}{2}}\, X^{-\frac{1}{2}}$$

Вставляя значенія y и $\frac{dy}{dx}$ въ общее уравненіе касательной

$$Y - y = \frac{dy}{dx}(X - x)$$

получаемъ :

$$Y = \sqrt{2p}\, x^{\frac{1}{2}} + \sqrt{\frac{p}{2}}\, x^{-\frac{1}{2}} X - \sqrt{\frac{p}{2}}\, x^{-\frac{1}{2}} x$$

$$Y = \sqrt{\frac{p}{2}}\, x^{\frac{1}{2}}\, X + \sqrt{\frac{p}{2}}\, x^{-\frac{1}{2}}$$

Если бы мы пожелали въ частности опредѣлить касательную въ вершинѣ параболы, для которой x = o, y = o, то встрѣтились бы съ затрудненіемъ, такъ какъ для этой точки, очевидно $\frac{dy}{dx} = \infty$ въ области значенія x = o функція y = $\sqrt{2p}.x^{-\frac{1}{2}}$ не допускаетъ разложенія въ рядъ Тейлора, такъ какъ для $x = 0$, эта функція не имѣетъ конечной, опредѣленной производной (всѣ производныя для $x = 0$ обращаются въ ∞). Такимъ образомъ наши общія разсужденія непримѣнимы къ точкѣ $x = 0, y = 0$ параболы; для того, чтобы избѣжать упомянутаго затрудненія, можемъ измѣнить систему осей, принимая ось x за ось y и, наоборотъ, или, что безразлично, не мѣняя названія осей, помѣнять ролями координаты x и y, т.е. разрѣшить ур-іе параболы относительно x

$$x = \frac{1}{2p} y^2$$

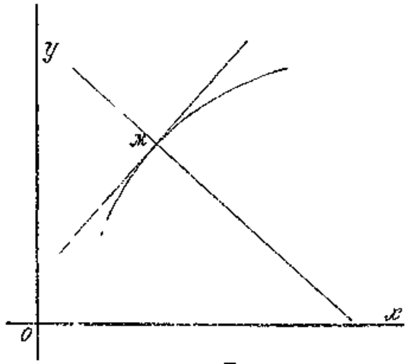
и представить уравненіе касательной въ видѣ

$$X - x = \frac{dx}{dy}[Y - y]$$

изъ уравненія параболы имѣемъ $\frac{dx}{dy} = \frac{y}{p}$, а для точки $x = 0, y = 0$... $\frac{dx}{dy} = 0$, и сл. ур-іе касательной въ этой точкѣ будетъ $X = 0$, т.е. касательной въ вершинѣ служитъ ось y; тангенсъ угла ея наклоненія къ оси x, очевидно, равенъ ∞, что вполнѣ согласно съ результатомъ $\frac{dy}{dx} = \infty$ для $x=0, y=0$.

4. НОРМАЛЬ КЪ ПЛОСКОЙ КРИВОЙ.

Прямая, проходящая черезъ какую-либо точку кривой перпендикулярно къ касательной, проведенной въ той же точкѣ, называется **нормалью**. Исходя изъ этого опредѣленія, легко получимъ уравненіе нормали въ точкѣ M (x, y) данной кривой (черт. 7), если извѣстно уравненіе касательной. Дѣйствительно такъ какъ нормаль проходитъ черезъ точку (x, y), то уравненіе ея должно имѣть видъ



Черт.7

$$A'[X-x]+B'[Y-y]=0 \quad (1)$$

гдѣ X и Y - текущія координаты; притомъ коэффиціенты A' и B' этого уравненія связаны съ коэффиціентами A и B уравненія касательной

$$A[X-x]+B[Y-y]=0 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (2)$$

соотношеніямъ

$$AA'+BB'=0 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (3)$$

которое есть условіе перпендикулярности прямыхъ, опредѣляемыхъ уравненіями (1) и (2) ,изъ равенства (3) имѣемъ :

$$A' . B' = -B . A,$$

а слѣдовательно уравненіе нормали принимаетъ видъ :

$$B(X-x)-A(Y-y)=0$$

или

$$\frac{X-x}{A}=\frac{Y-y}{B}$$

Если данная кривая опредѣляется двумя ур-іями

$$x=\varphi_1(t)$$
$$y=\varphi(t)$$

то уравненіе касательной имѣетъ видъ :

$$\frac{X-x}{\frac{dx}{dt}}=\frac{Y-y}{\frac{dy}{dt}},$$

и слѣдовательно, по предъидущему, уравненіе нормали будетъ :

$$(X-x)\frac{dx}{dt}+(Y-y)\frac{dy}{dt}=0 \qquad \text{.................(4)}$$

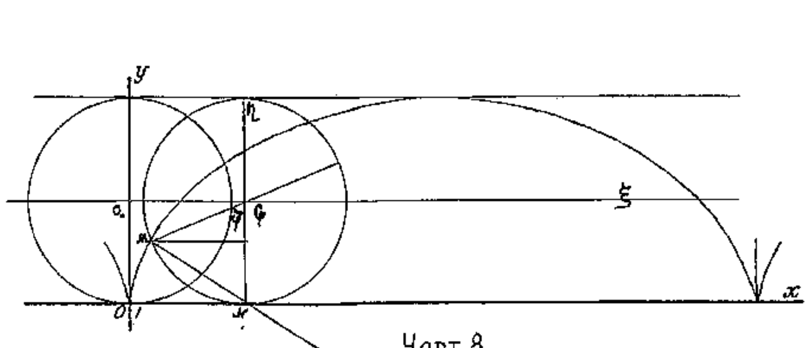
Если кривая опредѣляется однимъ уравненіемъ въ Декартовыхъ координатахъ $\mathcal{F}(x,y)=0$, то уравненіе касательной, какъ мы знаемъ, можетъ быть написано въ видѣ:

$$\frac{\partial \mathcal{F}}{\partial x}(X-x)+\frac{\partial \mathcal{F}}{\partial y}\cdot(Y-y)=0$$

По предъидущему, отсюда получаемъ уравненіе нормали

$$\frac{X-x}{\frac{\partial \mathcal{F}}{\partial x}}=\frac{Y-y}{\frac{\partial \mathcal{F}}{\partial y}} \qquad \text{.................(5)}$$

П р и м ѣ р ъ . Разсмотримъ нормаль къ ц и к л о и д ѣ. Такъ называется кривая, описываемая точкой окружности, которая катится безъ скольженія по прямой линіи. Выведемъ прежде всего уравненія циклоиды. Прямую, по которой катится окружность, возьмемъ за ось x; за начальное положеніе окружности будемъ считать то, въ которомъ точка, описывающая циклоиду, находится на оси X и служитъ точкой прикосновенія окружности; въ этой точкѣ помѣщаемъ начало координатъ и проводимъ ось y перпендикулярно къ оси x. Разсмотримъ какое-нибудь положеніе катящейся окружности и на ней точку M (черт. 8), описывающую цикл(



Черт. 8

иду. Радіусъ СМ, проведенный въ эту точку, въ начальной моментъ занималъ положеніе C_0O ; проводя радіусъ CN въ точку прикосновенія и замѣчая, что C N параллеленъ C_0O. можемъ сказать, что окружность при переходѣ изъ начальнаго положенія въ то положеніе, которое мы разсматриваемъ, повернулась на уголъ $NCM=\varphi$ Называя радіусъ черезъ a, имѣемъ длину дуги $NM = a\varphi$; а такъ какъ окружность катится безъ скольженія, то отрѣзокъ $ON = \smile NM = a\varphi$.Такимъ образомъ координаты точки С суть $x = a\varphi$, $y = a$. Проводимъ черезъ точку С прямыя, параллельныя осямъ X и У, и принимаемъ ихъ за новыя оси координатъ ξ и η . Легко найти координаты точки М относительно этой новой системы, такъ какъ знаемъ ея радіусъ -векторъ СМ = а и уголъ радіуса -вектора съ осью ξ , равный $\frac{3}{2}\pi - \varphi$, таким образомъ для точки М имѣемъ :

$$\xi = a\cos\left(\tfrac{3}{2}\pi - \varphi\right) = -a\sin\varphi, \quad \eta = a\sin\left(\tfrac{3}{2}\pi - \varphi\right) = a\cos\varphi$$

Возвращаясь къ первоначальной системѣ координатъ, получаемъ :

$$x = a\varphi + \xi = a(\varphi - \sin\varphi), \quad y = a + \eta = a(1 - \cos\varphi)$$

на основаніи общихъ формулъ преобразованія начала при сохраненіи направленія осей.

Уравненія

$$\begin{aligned} x &= a(\varphi - \sin\varphi) \\ y &= a(1 - \cos\varphi) \end{aligned} \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (6)$$

въ которыхъ φ разсматриваемъ, какъ произвольный параметръ, опредѣляютъ геометрическое мѣсто точки М, т.е. нашу циклоиду.

Очевидно, циклоида состоитъ изъ безконечнаго числа равныхъ вѣтвей изъ которыхъ каждая соотвѣтствуетъ одному полному обороту окружности. Точки одной такой вѣтви получимъ, напримѣръ, измѣняя въ ур-іяхъ (6) параметръ φ отъ 0 до 2π: наибольшее значеніе, которое при этомъ принимаетъ y, есть $2a$; оно соотвѣтствуетъ значенію $\varphi = \pi$, и слѣдовательно $x = \pi a$; точка, описывающая циклоиду, при этомъ занимаетъ наивысшее положеніе. Точки, въ которыхъ циклоида пересѣкаетъ ось X, получимъ, давая φ значенія $0, \pm 2\pi, \pm 4\pi, \pm 6\pi, \ldots$; абсциссы этихъ точекъ равны $0, \pm 2\pi a, \pm 4\pi a, \pm 6\pi a, \ldots$; Каждая вѣтвь циклоиды простирается отъ одной такой точки до слѣдующей; всѣ эти точки принадлежатъ къ числу такъ называемыхъ точекъ возврата нашей кривой.

Кромѣ изслѣдованной нами кривой, которая называется обыкновенной циклоидой, существуютъ еще "укороченная" и "удлиненная" циклоиды. Та и другая описываются точкой, неизмѣнно связанной съ кругомъ, который катится безъ скольженія по прямой линіи; все различіе заключается въ томъ, что точка эта не лежитъ на окружности, какъ для обыкновенной циклоиды, а внутри или внѣ круга. Уравненія той и другой кривой получимъ, повторяя разсужденія, которыя привели насъ къ уравненіямъ (6); все различіе будетъ заключаться въ томъ, что радіусъ-векторъ точки въ данномъ случаѣ не равенъ радіусу круга; обозначая его черезъ b, имѣемъ уравненія

$$\left.\begin{aligned} x &= a\varphi - b\sin\varphi \\ y &= a - b\cos\varphi \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (7)$$

опредѣляющія укороченную или удлиненную циклоиду, въ зависимости отъ того, будетъ-ли $b < a$ или $b > a$.

Ограничиваясь обыкновенной циклоидой, выведемъ уравненіе ея нормали. Для этой цѣли дифференцируемъ ур-ія (6) по параметру φ и получаемъ :

$$\frac{dx}{d\varphi} = a(1 - \cos\varphi), \quad \frac{dy}{d\varphi} = a\sin\varphi$$

Намъ остается вставить въ общее ур-іе нормали (4) вмѣсто X и Y ихъ выраженія изъ равенства (6) и вмѣсто $\frac{dx}{dt}$, $\frac{dy}{dt}$, найденныя нами производныя $\frac{dx}{d\varphi}$, $\frac{dy}{d\varphi}$ (произвольный параметръ t у насъ обозначенъ черезъ φ). Такимъ образомъ имѣемъ :

$$[X - a(\varphi - \sin\varphi)]\,a(1 - \cos\varphi) + [Y - a(1 - \cos\varphi)]\,a\sin\varphi = 0$$

или

$$(X - a\varphi)(1 - \cos\varphi) + Y\sin\varphi = 0 \qquad \ldots\ldots\ldots(8)$$

Ищемъ точку пересѣченія нормали съ осью X. Для этой цѣли полагаемъ въ ур-іи (8) $Y = 0$ и получаемъ :

$$X = a\varphi$$

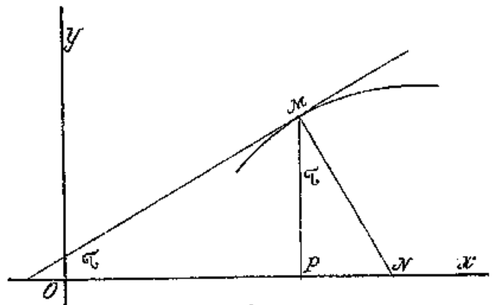
Выше мы имѣли $ON = a\varphi$; слѣдовательно, нормаль пересѣкаетъ ось x въ точкѣ N, т.е. проходитъ черезъ точку прикосновенія образующего круга.

5. ОТРѢЗКИ КАСАТЕЛЬНОЙ И НОРМАЛИ; СУБТАНГЕНСЪ, СУБНОРМАЛЬ.

Положимъ мы имѣемъ кривую, опредѣляемую уравненіемъ

$$y = f(x) \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(1)$$

въ Декартовыхъ координатахъ. Въ произвольной точкѣ M (черт.2) кривой проведемъ касательную и нормаль, продолжимъ ихъ до пересѣченія съ осью X въ точкахъ T и N, проведемъ кромѣ того ординату MP и разсмотримъ отрѣзки $MT = t$, $MN = n$, $TP = s_t$, $PN = s_n$ которые соотвѣтственно называемъ длиной касательной, длиной



Черт. 9

нормали, субтангенсомъ (подкасательвой) и субнормалью (поднормалью). Въ прямоугольномъ треугольникѣ M T P острый уголъ τ при вершинѣ T есть уголъ наклоненія касательной къ оси абсциссъ и слѣдовательно

$$tg\,\tau = \frac{dy}{dx}$$

$$\cos\tau = \frac{1}{\sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2}} = \frac{dx}{ds}$$

$$\sin\tau = \frac{\frac{dy}{dx}}{\sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2}} = \frac{dy}{ds}$$

гдѣ ds - дифференціалъ дуги (см. п. 2). Катетъ MP = y; опредѣляя гипотенузу MT = t и другой катетъ TP = s_t ,имѣемъ :

$$t = \frac{y}{\sin\tau} = \frac{y\sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2}}{\frac{dy}{dx}}$$

$$s_t = \frac{y}{tg\,\tau} = \frac{y}{\frac{dy}{dx}} \qquad \text{.........(2)}$$

Въ прямоугольномъ треугольникѣ PMN уголъ при вершинѣ M точно также равенъ τ ,такъ какъ стороны его перпендикулярны сторонамъ угла MTP ; опредѣляя гипотенузу MN = N и катетъ PN = $\mathcal{J}_n$ имѣемъ :

$$n = \frac{y}{\cos\tau} = y\sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2}$$

$$\mathcal{J}_n = y\,tg\,\tau = y\frac{dy}{dx} \qquad \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots(3)$$

П р и м ѣ р ъ . Найдемъ субтангенсъ и субнормаль для параболы, опредѣляемой уравненіемъ : $y^2 = 2px$

Дифференцируя уравненіе параболы, имѣемъ(по сокращеніи на 2)

$$y\frac{dy}{dx} = p,$$

откуда $\frac{dy}{dx} = \frac{p}{y}$

и слѣдовательно

$$\mathcal{J}_t = \frac{y^2}{p} = \frac{2px}{p} = 2x$$

$$\mathcal{J}_n = y\frac{dy}{dx} = p$$

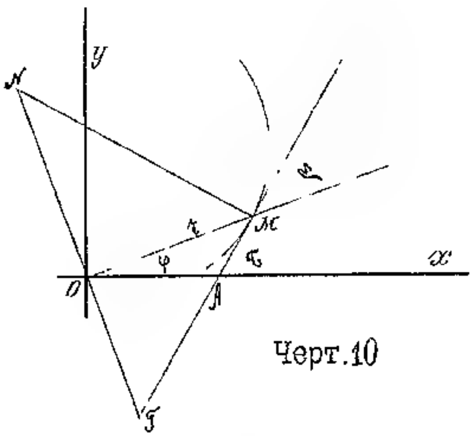
Таким образомъ, субнормаль параболы имѣетъ постоянную величину.

6. КАСАТЕЛЬНАЯ ВЪ ПОЛЯРНЫХЪ КООРДИНАТАХЪ ; ОТРѢЗКИ КАСАТЕЛЬНОЙ И НОРМАЛИ; ПОЛЯРНЫЕ СУБТАНГЕНСЪ И СУБНОРМАЛЬ.

Пусть кривая опредѣляется уравненіемъ въ полярныхъ координатахъ

$$r = f(\varphi) \qquad \dots\dots\dots\dots\dots\dots(1)$$

гдѣ r - радіусъ-векторъ, а φ -полярный уголъ. Для того, чтобы опредѣлить положеніе касательной въ какой-либо точкѣ М(r, φ)кривой, достаточно знать уголъ μ, образуемый касательной съ радіусомъ векторомъ. Изъ треугольника ОАМ (черт. 10), мы имѣемъ, что уголъ τ, образованный касательной съ полярной осью, какъ



Черт.10

внѣшній уголъ треугольника, равенъ суммѣ угловъ ОМА= μ и МОА - φ, и слѣдовательно

$$\mu = \tau - \varphi$$

откуда

$$tg\mu = \frac{tg\tau - tg\varphi}{1 + tg\tau \cdot tg\varphi} \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots (2)$$

Введемъ въ уравненіе кривой (1) вмѣсто полярныхъ координатъ Декартовы, полагая

$$x = r\cos\varphi, \quad y = r\sin\varphi, \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots (3)$$

уголъ τ есть уголъ наклоненія касательной къ оси абсциссъ и слѣдовательно

$$tg\tau = \frac{dy}{dx}$$

Внося это выраженія $tg\tau$ въ формулу (2), имѣемъ :

$$tg\mu = \frac{\frac{dy}{dx} - tg\varphi}{1 + \frac{dy}{dx} \cdot tg\varphi} = \frac{dy \cdot \cos\varphi - dx\sin\varphi}{dx\cos\varphi + dy\sin\varphi} \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots (4)$$

Для опредѣленія d x и d y, дифференцируемъ равенства (3), изъ которыхъ получаемъ :

$$dx = \cos\varphi \cdot dr - r\sin\varphi d\varphi$$
$$dy = \sin\varphi dr + r\cos\varphi d\varphi$$

Умножимъ первое равенство на $-\sin\varphi$, второе на $\cos\varphi$ и сложимъ, а затѣмъ умножимъ первое на $\cos\varphi$, второе на $\sin\varphi$ и сложимъ; тогда будемъ имѣть:

$$dy\cos\varphi - dx\sin\varphi = r(\cos^2\varphi + \sin^2\varphi)d\varphi = rd\varphi$$
$$dx\cos\varphi + dy\sin\varphi = (\cos^2\varphi + \sin^2\varphi)dr = dr$$

и слѣдовательно окончательно, въ силу равенства (4), получаемъ для $tg\mu$ слѣдующее выраженіе

$$tg\mu = \frac{rd\varphi}{dr} = \frac{r}{\frac{dr}{d\varphi}}, \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (5)$$

гдѣ производная $\frac{dr}{d\varphi}$ опредѣляется изъ уравненія (1) данной кривой.

Въ точкѣ М данной кривой проведемъ касательную $M\mathcal{T}$, нормаль MN и продолжимъ ихъ до пересѣченія (въ точкахъ $\mathcal{T}$ и N) съ перпендикуляромъ $\mathcal{T}$N, возставленнымъ къ радіусу-вектору ОМ изъ полюса О. Отрѣзки $M\mathcal{T}$, MN, $O\mathcal{T}$, ON называются соотвѣтственно полярными касательной, нормалью, субтангенсомъ и субнормалью, мы будемъ ихъ обозначать соотвѣтственно черезъ Т, N, Σ_t, Σ_n. Изъ прямоугольнаго треугольника $OM\mathcal{T}$, въ которомъ острый уголъ при вершинѣ М равенъ μ и катетъ ОМ= r имѣемъ :

$$T = \frac{r}{\cos\mu} = r\sqrt{1+tg^2\mu} = r\sqrt{1+r^2\frac{d\varphi^2}{dr^2}}$$
$$\Sigma_t = r\,tg\mu = r^2\frac{d\varphi}{dr} \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots (6)$$

Изъ треугольника MON, въ которомъ уголъ при вершинѣ N, какъ уголъ со сторонами перпендикулярными къ сторонамъ OM и MT равенъ μ, имѣемъ :

$$N = \frac{r}{\sin\mu} = \frac{r\sqrt{1+tg^2\mu}}{tg\mu} = \frac{r\sqrt{1+r^2\frac{d\varphi^2}{dr^2}}}{r\frac{d\varphi}{dr}} = \frac{dr}{d\varphi}\sqrt{1+r^2\frac{d\varphi^2}{dr^2}} = \sqrt{\left(\frac{dr}{d\varphi}\right)^2+r^2}$$

$$\Sigma_n = r\,ctg\mu = \frac{r}{tg\mu} = \frac{r}{r\frac{d\varphi}{dr}} = \frac{dr}{d\varphi} \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots (7)$$

Формулы (6) и (7) опредѣляютъ полярные касательную, нормаль, субтангенсъ и субнормаль.

7. Примѣры.

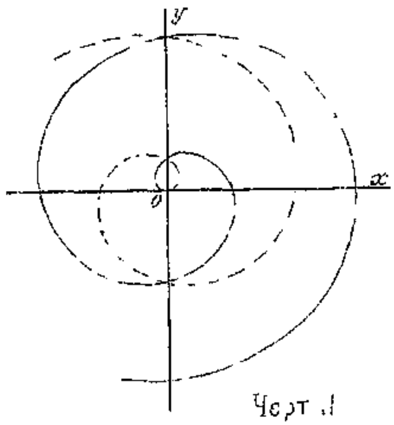
АРХИМЕДОВА СПИРАЛЬ.

Архимедова спираль, какъ видно изъ самаго ея названія, была извѣстна еще въ древности. Уравненіе ея въ полярныхъ координатахъ имѣетъ видъ :

$$r = a\varphi$$

гдѣ а - постоянное, которое будемъ считать положительнымъ. При возрастаніи полярнаго угла въ ариѳметической прогрессіи, радіусъ - векторъ, очевидно, то же возрастаетъ въ ариѳметической прогрессіи; пользуясь этимъ замѣчаніемъ можемъ довольно легко составить себѣ представленіе о видѣ Архимедовой спирали (ср. черт. 11), особенно, если построимъ нѣсколько ея точекъ, соотвѣтствующихъ напримѣръ значеніямъ $\varphi = 0, \frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{4}$ .... Для $\varphi = 0$ имѣемъ $r = 0$; слѣдовательно, спираль проходитъ черезъ полюсъ.

Значенія r ,соотвѣтствующія различнымъ значеніямъ φ изъ вышеупомянутаго ряда,помѣщены въ нижеслѣдующей табличкѣ :

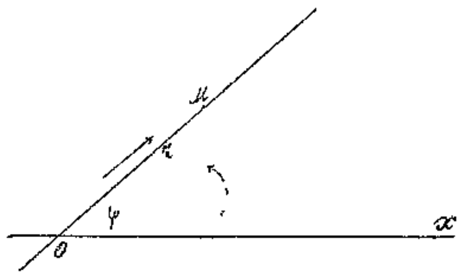


Черт.11

φ	r
0	0
$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{4}a$
$\frac{\pi}{2}$	$\frac{\pi}{2}a$
$\frac{3\pi}{4}$	$\frac{3\pi a}{4}$
π	πa
$\vdots$	$\vdots$

Давая φ отрицательныя значенія, получаемъ отрицательныя значенія r , и легко видѣть, что каждой точкѣ спирали съ координатами r , φ соотвѣтствуетъ точка съ координатами $-r$,$-\varphi$ двѣ упомянутыхъ точки, очевидно лежатъ симметрично относительно прямой, проходящей черезъ полюсъ перпендикулярно къ полярной оси, и слѣдовательно спираль Архимеда состоитъ изъ двухъ частей, симметричныхъ относительно упомянутой прямой (ср. чертежъ).

Архимедовой спирали можно дать простое кинематическое опредѣленіе, а именно, можно сказать, что она есть траэкторія точки, равномѣрно движущейся по прямой, которая въ свою очередь равномѣрно вращается около нѣкоторой неподвижной точки. Въ самомъ дѣлѣ, выберемъ эту неподвижную точку О(черт. 12) за полюсъ и пусть въ начальный моментъ t = О движущаяся точка М совпадаетъ съ О ; соотвѣтствующее положеніе прямой примемъ за полярную ось Ox; называя постоянную скорость поступательнаго движенія точки M черезъ v, а постоянную угловую скорость вращенія прямой черезъ ω, имѣемъ



Черт. 19

$$r = vt, \quad \varphi = \omega t$$

гдѣ r = OM есть радіусъ-векторъ точки M, φ = =MOx есть полярный уголъ той же точки, а t - время. Исключая изъ двухъ уравненій движенія t, имѣемъ:

$$r = \frac{v}{\omega}\cdot\varphi$$

откуда заключаемъ, что траэкторія точки M есть Архимедова спираль, для которой постоянный множитель a равенъ отношенію скоростей $\frac{v}{\omega}$.

Полагая въ уравненіи спирали

$$r = a\varphi$$

φ равнымъ 2 П, имѣемъ:

$$r = 2\pi a$$

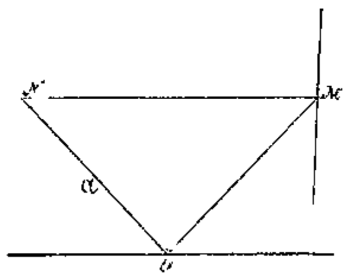
т.е.: радіусъ-векторъ Архимедовой спирали, соотвѣтствующій полярному углу 2П, или другими словами отрѣзокъ, отсѣкаемый спиралью на полярной оси, равенъ окружности круга радіуса a.

Такимъ образомъ, если бы мы имѣли возможность строить Архимедову спираль для каждаго значенія a, то мы могли бы рѣшить задачу о спрямленіи круга (а слѣдовательно и задачу о квадратѣ круга).

Найдемъ полярную субнормаль Архимедовой спирали: примѣняя общія формулы, имѣемъ :

$$\mathcal{S}_n = \frac{dr}{d\varphi} = a$$

т.е. субнормаль Архимедовой спирали сохраняетъ постоянную величину во всѣхъ точкахъ кривой. Отсюда выводимъ простой способъ построенія нормали, а слѣдовательно и касательной въ данной точкѣ М Архимедой спирали . Соединяемъ М съ полюсомъ О (черт. 13) и на перпендикулярѣ, возставленномъ къ прямой ОМ въ точкѣ О, откладываемъ отрѣзокъ ON = a. Соединяя точку N съ М, получаемъ нормаль MN; возставляя къ ней перпендикуляръ въ точкѣ М, получаемъ касательную.



Черт. 13

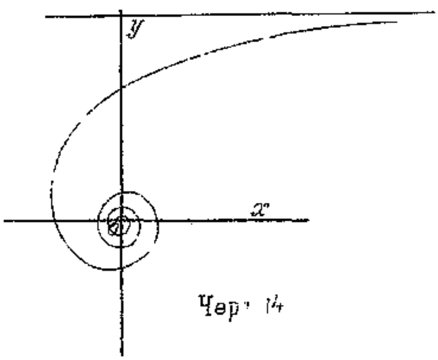
ГИПЕРБОЛИЧЕСКАЯ СПИРАЛЬ.

Гиперболическая спираль опредѣляется въ полярныхъ координатахъ уравненіемъ

$$r\varphi = a \qquad \text{или} \qquad r = \frac{a}{\varphi}$$

Прежде всего очевидно, что, подобно Архимедовой спирали, гиперболическая спираль состоитъ изъ двухъ частей, симметричныхъ относительно прямой, проходящей черезъ полюсъ перпендикулярно къ полярной оси; на чертежѣ изображена только одна изъ этихъ частей, соотвѣтствующая положительнымъ значеніямъ φ .

Для $\varphi = 0$ имѣемъ $r = \infty$; при возростаніи φ радіусъ-векторъ убываетъ и для $\varphi=\infty$ имѣемъ $r=0$. Такимъ образомъ кривая совершаетъ безчисленное множество оборотовъ около полюса, все болѣе и болѣе приближаясь къ нему, но не достигая его ни для какого конечнаго значенія φ ; полюсъ служитъ такъ - называемой асимптотической точкой спирали (черте жъ 14).



Чер. 14

Опредѣлимъ полярный субтангенсъ гиперболической спирали. По общимъ формуламъ имѣемъ:

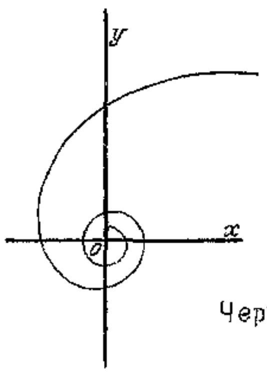
$$S_t = r^2\frac{d\varphi}{dr} = r^2\left(-\frac{a}{r^2}\right) = -a$$

Такимъ образомъ $S_t = const$ во всѣхъ точкахъ гиперболической спирали. Не трудно отсюда вывести простое построеніе касательной, вполнѣ аналогичное построенію нормали для Архимедовой спирали.

ЛОГАРИѲМИЧЕСКАЯ СПИРАЛЬ.

Уравненіе логариѳмической спирали имѣетъ видъ : $r = ae^{k\varphi}$

гдѣ a и k - постоянныя, которыя будемъ предполагать положительными. При возрастаніи φ въ ариѳметической прогрессіи, разность которой равна α, r возрастаетъ, очевидно, въ геометрической прогрессіи съ знаменателемъ $= e^{k\varphi}$; ни при какомъ конечномъ значеніи φ радіусъ-векторъ не обращается въ нуль, но убываетъ по мѣрѣ возрастанія абсолютной величины φ, когда φ измѣняется по отрицательнымъ значеніямъ, и для $\varphi = -\infty$ имѣемъ $r = 0$; такимъ образомъ логариѳмическая спираль имѣетъ въ полюсѣ асимптотическую точку; наконецъ при $\varphi = +\infty$ радіусъ - векторъ $r = \infty$. Сопоставляя всѣ эти замѣчанія, легко уясиить себѣ видъ логариѳмической спирали (см. черт. 15), особенно если построить рядъ точекъ, соотвѣтствующихъ какимъ - нибудь значеніямъ φ напримѣръ, значеніямъ



Черт. 15

$$\varphi = 0, \frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{4}, \pi, \ldots\ldots$$

Опредѣлимъ тангенсъ угла μ, образуемаго касательной въ точкѣ M логариѳмической спирали съ соотвѣтствующимъ радіусомъ -векторомъ. Дифференцируя уравненіе спирали, имѣемъ :

$$dr = kae^{k\varphi}d\varphi = kr d\varphi$$

и слѣдовательно, примѣняя общую формулу, получаемъ :

$$tg\mu = r\frac{d\varphi}{dr} = r\frac{d\varphi}{krd\varphi} = \frac{1}{k}$$

Такимъ образомъ, касательныя логариѳмической спирали наклонены къ радіусамъ-векторамъ подъ п о с т о я н н ы м ъ угломъ, тангенсъ котораго = $\frac{1}{k}$

Прежде чѣмъ приступить къ дальнѣйшему изслѣдованію свойствъ логариѳмической спирали, покажемъ, что постоянный множитель a входящій въ уравненіе спирали, не имѣетъ сушественнаго значенія. Для этой цѣли положимъ : $lga = b$

и слѣдовательно $a = e^b$;

тогда уравненіе спирали перепишется въ видѣ

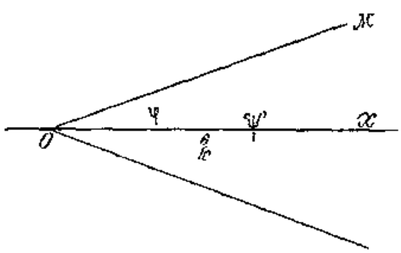
$$r = e^b e^{k\varphi} = e^{b+k\varphi} = e^{k(\varphi+\frac{b}{k})}$$

Повернемъ полярную ось на уголъ $\frac{b}{k}$ въ направленіи обратномъ направленію возрастанія полярныхъ угловъ; обозначая черезъ ψ полярный уголъ, отсчитываемый отъ этой новой оси, имѣемъ, очевидно :

$$\psi = \varphi + \frac{b}{k}$$

(ср. черт. 16), и слѣдовательно уравненіе спирали принимаетъ видъ :

$$r = e^{k\psi}$$



Черт. 16

Такимъ образомъ, всѣ спирали, соотвѣтствующія одному значенію k и различнымъ значеніямъ a опредѣляются однимъ и тѣмъ же уравненіемъ, при соотвѣтственномъ выборѣ полярной оси, а слѣдовательно уравненіе $r = ae^{k\varphi}$

при различныхъ значеніяхъ постояннаго множителя a опредѣляетъ р а в н ы я логариѳмическія спирали, отличающіяся лишь положеніемъ, всѣ онѣ могутъ быть получены изъ какой - нибудь одной поворотомъ около полюса на подходящіе углы.

Съ другой стороны измѣняя множитель a въ уравненіи спирали, мы всѣ радіусы - векторы увеличиваемъ или уменьшаемъ въ одномъ и томъ же отношеніи и, слѣдовательно, получаемъ кривую, п о д о б н у ю данной. Такимъ образомъ мы приходимъ къ слѣдующему выводу : кривая, подобная логариѳмической спирали, есть равная ей логариѳмическая спираль

Вычислимъ для логариѳмической спирали длину полярной касательной и нормали. Примѣняя общія формулы, имѣемъ :

$$T = r\sqrt{1+\left(r\frac{d\varphi}{dr}\right)^2} = r\sqrt{1+\frac{1}{k^2}} = \frac{ae^{k\varphi}\sqrt{k^2+1}}{k}$$

$$N = \sqrt{r^2+\left(\frac{dr}{d\varphi}\right)^2} = \sqrt{a^2e^{2k\varphi}+k^2a^2e^{2k\varphi}} = ae^{k\varphi}\sqrt{1+k^2}$$

Сопоставимъ выраженіе отрѣзка T съ длиной дуги логариѳмической спирали. Для дифференціала дуги имѣемъ :

$$ds = \sqrt{dr^2+r^2d\varphi^2} = \sqrt{k^2a^2e^{2k\varphi}+d\varphi^2} =$$
$$= ae^{k\varphi}\sqrt{k^2+1}\cdot d\varphi = d\left(\frac{ae^{k\varphi}\sqrt{k^2+1}}{k}\right)$$

откуда
$$s = \frac{ae^{k\varphi}\sqrt{k^2+1}}{k} + C$$

гдѣ C - произвольное постоянное ; выраженіе, полученное нами для s есть самое общее, такъ какъ изъ равенства дифференціаловъ двухъ функцій:

$$s \text{ и } \frac{ae^{k\varphi}\sqrt{k^2+1}}{k}$$

Слѣдуетъ, что эти функціи могутъ отличаться лишь на постоянное. Если мы выберемъ опредѣленное начало для отсчета дугъ, то произвольное постоянное C получаетъ вполнѣ опредѣленное значеніе. Въ самомъ дѣлѣ, пусть начало дугъ соотвѣтствуетъ значенію φ_0 полярнаго угла ; въ такомъ случаѣ выраженіе длины дуги s должно исчезать для $\varphi = \varphi_0$ и слѣдовательно имѣемъ :

$$\frac{ae^{k\varphi_0}\sqrt{1+k^2}}{k} + C = 0$$

откуда находимъ C. Выберемъ въ частности начало дугъ въ полюсѣ спирали; такъ какъ полюсъ есть асимптотическая точка нашей кривой, то, строго говоря, дѣло надо понимать такъ: будемъ передвигать начало дугъ по спирали въ сторону убыванія полярныхъ угловъ, т.е. будемъ давать φ_0 отрицательныя значенія, неограниченно возрастающія по абсолютной величинѣ, и перейдемъ къ предѣлу для $\varphi = \infty$; при этомъ выраженіе s стремится къ нѣкоторому опредѣленному предѣлу, который и называемъ длиной дуги, отсчитываемой отъ полюса спирали. Для $\varphi = -\infty$ равенство, опредѣляющее C, даетъ намъ

$$0 + C = 0$$

откуда C = 0 и слѣдовательно для длины дуги, отсчитываемой отъ полюса спирали, получаемъ выраженіе

$$s = \frac{ae^{k\varphi}\sqrt{1+k^2}}{k}$$

Сопоставляя его съ выраженіемъ отрѣзка T, которое мы имѣли выше, получаемъ
$$T = s$$

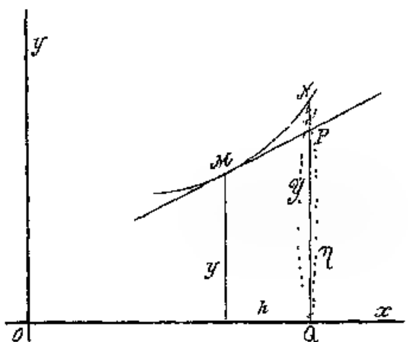
Такимъ образомъ, длина полярной касательной логариѳмической спирали равна длинѣ дуги, отсчитываемой отъ полюса спирали.

-.-.-.-.-.-

8. ВЫПУКЛОСТЬ И ВОГНУТОСТЬ; ТОЧКИ ПЕРЕГИБА.

Изслѣдуемъ взаимное расположенie кривой и ея касательной въ смежности съ точкой прикосновенія. Предположимъ, что кривая определяется уравненіемъ

$$y = f(x) \quad \ldots(1)$$



Черт. 17

Разсмотримъ на нашей кривой точку M, координаты которой обозначимъ черезъ X, Y, и точку N, которой соотвѣтствуютъ координаты $X + h, \eta$. Ордината N Q последней точки пересѣкаетъ касательную, проведенную въ M, въ точкѣ P; ординату P Q этой точки обозначаемъ черезъ $\mathcal{Y}$; абсписса точки P равна абсписсѣ точки N; т.е. $x + h$. Такъ какъ P лежитъ на касательной, то координаты ея должны удовлетворять ур-iю касательной, и слѣдовательно имѣемъ :

$$\mathcal{Y} - y = \frac{dy}{dx}(x + h - x)$$

или, замѣняя y черезъ f (x) на основанія ур-iя (1):

$$\mathcal{Y} = f(x) + h.f'(x) \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (2)$$

Точка N лежитъ на данной кривой; слѣдовательно ея координаты должны удовлетворять ур-iю...(1), т.е. имѣемъ : $\eta = f(x+h)$

Предполагая h достаточно малымъ, разлагаемъ $f(x+h)$ по формулѣ Тэйлора[*] и получаемъ

$$3\ldots\ldots \eta = f(x) + h f'(x) + \frac{h^2}{1.2} f''(x) + \quad + \frac{h^n}{1.2\ldots n} \cdot f^n(x) + \frac{h^{n+1}}{(n+1)!} f^{(n+1)}(x+\theta h)$$

гдѣ $0 < \theta < 1$. Вычитая изъ равенства (3) равенство (2), имѣемъ :

$$\eta - y = \frac{h^2}{1.2} f''(x) + \cdots + \frac{h^n}{1.2\ldots n} f^n(x) + \frac{h^{n+1}}{(n+1)!} f^{(n+1)}(x+\theta h) \ldots\ldots (4)$$

При достаточно малом h знакъ $\eta - y$ совпадаетъ со знакомъ 1-го члена и слѣдсвательно не измѣняется съ измѣненіемъ знака h, такъ какъ первый членъ содержитъ h вовторой степени. Отсюда заключаемъ, что кривая въ смежности съ точкой M лежитъ по одну сторону касательной, (для точекъ N, лежащихъ вправо или влѣво отъ M, имѣемъ одновременно $\eta > y$ или $\eta < y$

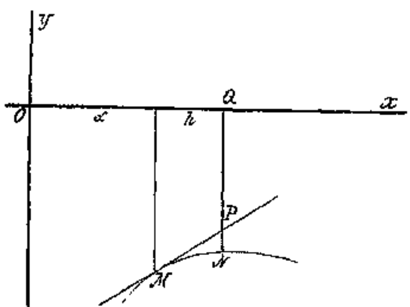
Если кривая въ смежности съ точкой M находится въ области положительныхъ y, какъ это имѣетъ мѣсто на нашемъ чертежѣ, то точки ея, достаточно близкія къ M, лежатъ дальше или ближе отъ оси абсциссъ, чѣмъ соотвѣтствующія точки касательной, въ зависимости отъ знака разности $\eta - y$, а слѣдовательно – знака $f''(x)$. Если $f''(x) > 0$, то имѣемъ первый случай, и тогда кривая въ смежности съ точкой M лежитъ внѣ остраго угла, образованнаго касательной съ осью абсциссъ; если $f''(x) < 0$, то имѣемъ второй случай, и тогда кривая въ смежности съ точкой M лежитъ внутри остраго угла, образованнаго касательной съ

- - - - -

[*] Предполагая, что $f(x)$ допускаетъ производныя до какого - нибудь порядка $n+1$.

осью абсциссъ. Въ первомъ случаѣ говоримъ, что кривая обращена къ оси абсциссъ **выпуклостью**, во второмъ **вогнутостью**.

Если кривая въ смежности съ точкой M расположена въ области отрицательныхъ значенiй y, то ординаты, которыя мы выше обозначали черезъ η и y оказываются отрицательными, а потому при $\eta - y > 0$ имѣемъ $|\eta| < |y|$ и наоборотъ; слѣдовательно, повторяя наши разсужденiя, придемъ къ обратнымъ результатамъ: при $f''(x) > 0$, кривая обращена къ оси абсциссъ вогнутостью, а при $f''(x) < 0$ – выпуклостью (ср. черт. 18).



Черт 18

Не трудно составить общiй критерiй, позволяющiй рѣшить, обращена – ли кривая къ оси абсциссъ выпуклостью, или вогнутостью, независимо отъ того въ какой области находится наша кривая. Въ самомъ дѣлѣ, мы видимъ, что въ обоихъ разобранныхъ нами случаяхъ знакъ $f''(x)$ совпадаетъ со знакомъ ординаты $y = f(x)$ или противоположенъ ему, смотря по тому, обращена – ли кривая къ оси абсциссъ выпуклостью или вогнутостью, и слѣдовательно вопросъ рѣшается, напримѣръ, знакомъ отношенiя:

$$\frac{f''(x)}{f(x)} \qquad \text{..........} (5)$$

Такимъ образомъ получаемъ слѣдующiй результатъ: если въ изслѣдуемой точкѣ кривой имѣемъ:

$$\frac{f''(x)}{f(x)} > 0$$

то кривая въ этой точкѣ обращена къ оси абсциссъ своей выпуклостью ; если въ изслѣдуемой точкѣ

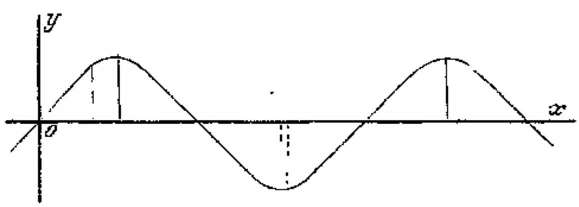
$$\frac{f''(x)}{f(x)} < 0$$

то кривая обращена къ оси абсциссъ своей вогнутостью.

П р и м ѣ р ъ . Разсмотримъ кривую, называемую с и н у с о и д о й . Она опредѣляется уравненіемъ

$$y = \sin x$$

Кривая эта, очевидно, состоитъ изъ безконечнаго числа періодически повторяющихся волнъ и пересѣкаетъ ось X въ точкахъ



Черт. 19

$0, \pm \pi, \pm 2\pi, \pm 3\pi, \ldots\ldots$

Въ данномъ случаѣ имѣемъ :

$$f(x) = \sin x, \; f'(x) = \cos x, \; f''(x) = -\sin x$$

и слѣдовательно

$$\frac{f''(x)}{f(x)} = -1$$

Такимъ образомъ синусоида во всѣхъ своихъ точкахъ обращена къ оси X в о г н у т о с т ь ю. Понятно, что при этомъ исключаемъ изъ разсмотрѣнія точки лежащія на оси X, для которыхъ самый вопросъ о выпуклости или вогнутости кривой по отношенію къ оси X не имѣетъ смысла.

Всѣ предшествующія разсужденія предполагали, что въ разсматриваемой точкѣ кривой $f''(X)$ отлично отъ нуля. Допустимъ теперь, что $f''(X) = 0$ для точки M, а $f'''(X) \neq 0$. Тогда равенство (4) принимаетъ видъ:

$$\eta - y = \frac{h^3}{1\cdot2\cdot3} f'''(x) + \ldots + \frac{h^n}{1\cdot2\ldots n} f^{(n)}(x) + \frac{h^{n+1}}{(n+1)!} f^{(n+1)}(x+\theta h) \ldots (6)$$

Разстояніе точекъ кривой отъ точекъ касательной при безконечно-маломъ h есть безконечно-малая величина третьяго порядка, а не второго, какъ въ общемъ случаѣ. При достаточно-маломъ h знакъ разности $\eta - y$ совпадаетъ со знакомъ 1-го члена и, слѣдовательно, измѣняется съ измѣненіемъ знака h. Отсюда заключаемъ, что кривая въ точкѣ M **пересѣкаетъ** касательную, переходя съ одной стороны ея на другую (ср. черт 20). Такія точки называются **точками перегиба**.

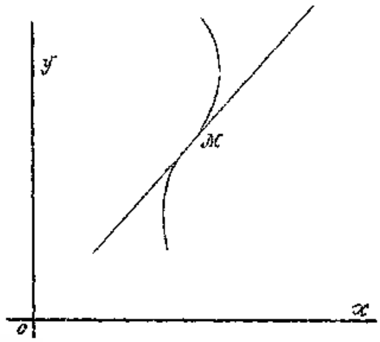
Если бы въ точкѣ M кривой исчезала не только вторая производная $f''(X)$, но и третья, четвертая и т.д., а первая производная, отличная отъ нуля, была бы $f^{(n)}(x)$, то равенство (4) дало бы намъ:

$$\eta - y = \frac{h^n}{1\cdot2\ldots n} f^{(n)}(x) + \frac{h^{n+1}}{(n+1)!} f^{(n+1)}(x+\theta h) \ldots\ldots\ldots\ldots (7)$$

Кривая въ точкѣ M пересѣкала бы касательную или лежала бы по одну сторону отъ нея, смотря по тому, есть ли n число нечетное или четное.

Ограничимся случаемъ, который мы разсматривали выше, т.е.

когда $f''(X) = 0$, $f'''(X) \neq 0$, и докажемъ, что во всякой точкѣ, для которой выполняются эти условія, т. е. въ точкѣ перегиба, выпуклость кривой мѣняется на вогнутость, или обратно. При этомъ, впрочемъ, мы исключаемъ изъ разсмотрѣнія точки на оси X, для которыхъ не можетъ быть рѣчи о выпуклости и вогнутости по отношенію къ оси X. Итакъ, предполагаемъ $f(X) \neq 0$ и разсмотримъ отношеніе



Черт. 20

$$\frac{f''(x)}{f(x)}$$

для точекъ достаточно близкихъ къ M и расположенныхъ по ту и по другую сторону отъ M; другими словами разсмотримъ отношеніе

$$\frac{f''(x+h)}{f(x+h)}$$

для положительныхъ и отрицательныхъ значеній h. Разлагая числитель и знаменатель въ рядъ Тэйлора, имѣемъ :

$$\frac{f''(x+h)}{f(x+h)} = \frac{\frac{h}{1}\cdot f'''(x) + \cdots + R_m}{f(x) + \frac{h}{1} f'(x) + \cdots + R_n},$$

гдѣ R_m и R_n - остаточные члены.

При достаточно маломъ h, знаки числителя и знаменателя совпадаютъ со знаками ихъ первыхъ членовъ; слѣдовательно, знакъ знаменателя не измѣняется, а знакъ числителя мѣняется съ измѣненіемъ знака h ; а потому и знакъ дроби мѣняется съ измѣненіемъ знака h, т.е. въ точкѣ M выпуклость мѣняется на вогнутость или обратно

Для того, чтобы найти точки перегиба данной кривой, опредѣляемой уравненіемъ $y = f(x)$,

надо согласно предыдущему рѣшить уравненіе

$$f''(x) = 0$$

значенія X, удовлетворяющія этому уравненію, суть абсциссы точекъ перегиба; ординаты находимъ, вставляя значенія X въ уравненіе кривой. При этомъ слѣдуетъ замѣтить, что въ числѣ найденныхъ точекъ могутъ оказаться точки, не принадлежащія къ точкамъ перегиба въ тѣсномъ смыслѣ слова, такъ какъ для нѣкоторыхъ изъ найденныхъ значеній X можетъ исчезать третья производная $f'''(X)$ или даже вообще цѣлый рядъ производныхъ, кончая производной какого-либо нечетнаго порядка. Иногда и эти точки называютъ точками перегиба. Если желаемъ ограничиться точками перегиба въ тѣсномъ смыслѣ слова, то слѣдуетъ выбрать тѣ значенія X, для которыхъ первая не обращающаяся въ нуль производная (послѣ второй) - нечетнаго порядка.

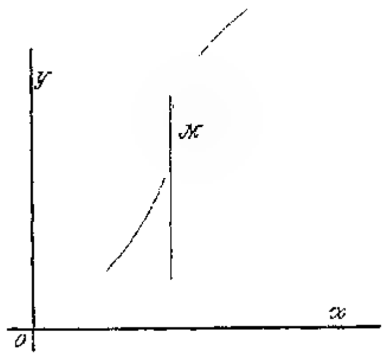
Признакъ точекъ перегиба

$$\frac{d^2y}{dx^2} = f''(x) = 0$$

былъ нами полученъ изъ формулы(4), которая предполагала разложимость функціи $f(x + h)$ въ рядъ Тэйлора по степенямъ h; между тѣмъ могутъ быть точки перегиба, соотвѣтствующія такимъ значеніямъ X, въ области которыхъ $y = f(x)$ не разложимо въ рядъ Тэйлора. Это именно будетъ имѣть мѣсто, если въ разсматриваемой точкѣ касательная параллельна оси y (черт, 21); въ такомъ случаѣ для соотвѣтствующаго значенія X имѣемъ :

$$\frac{dy}{dx} = f'(x) = \infty \ ;$$

слѣдовательно, у = f (X) не разложимо въ рядъ Тэйлора въ области этого значенія X , и всѣ наши предшествующія разсужденія здѣсь поэтому не примѣнимы;



Черт 21

Для того, чтобы не оставить безъ вниманія точекъ перегиба этого рода, мы можемъ поступить слѣдующимъ образомъ: перемѣнимъ оси координатъ, принявъ прежнюю ось X за ось У и наоборотъ, или, что безразлично, не мѣняя осей, повторимъ всѣ прежнія наши разсужденія, измѣняя вездѣ X на У и обратно и, предполагая, слѣдовательно, уравненіе кривой разрѣшеннымъ относительно X. Въ такомъ случаѣ точки перегиба, въ которыхъ касательная параллельна оси У, перестаютъ играть особую роль, такъ какъ для нихъ имѣемъ $\frac{dx}{dy} = 0$, т.е. первая производная конечна. Такимъ образомъ, приходимъ къ условію

$$\frac{d^2x}{dy^2} = 0,$$

изъ котораго и можемъ опредѣлить точки перегиба съ касательной параллельной оси У.

Очевидно, что два условія

$$\frac{d^2y}{dx^2} = 0, \ \frac{d^2x}{dy^2} = 0 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (8)$$

одновременно имѣютъ мѣсто для всѣхъ точекъ перегиба, для которыхъ касательная не параллельна ни одной изъ осей; о д н о 1- е условіе выполняется для точекъ перегиба, въ которыхъ касательная параллельна оси X; одно 2-ое - для точекъ перегиба, въ которыхъ касательная параллельна оси У.

Выведемъ признакъ точекъ перегиба въ предположеніи, что кривая опредѣляется уравненіями вида

$$\begin{aligned} x &= \varphi(t) \\ y &= \psi(t) \end{aligned} \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (9)$$

гдѣ t - произвольный параметръ. Обозначая дифференцированія по t акцентами, имѣемъ :

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy.dt}{dt.dx} = \frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}} = \frac{y'}{x'}$$

и затѣмъ

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{1}{x'} \cdot \frac{d}{dt}\left(\frac{y'}{x'}\right) = \frac{x'y''-x''y'}{x'^3}$$

Аналогично получаемъ :

$$\frac{d^2y}{dy^2} = \frac{y'x''-y''x'}{y'^3}$$

Такъ какъ для точекъ перегиба

$$\frac{d^2y}{dx^2} = 0 \text{ и } \frac{d^2x}{dy^2} = 0,$$

то слѣдовательно, мы должны имѣть :

$$x'y''-x''y' - 0; \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (10)$$

равенство (10) и даетъ намъ искомый признакъ точекъ перегиба для кривой, опредѣляемой уравненіями (9).

Допустимъ, наконецъ, что кривая опредѣляется уравненіемъ

$$F(x,y) = 0 \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (11)$$

Уравненіе это опредѣляетъ y въ функціи x или обратно. Дифференцируя въ томъ или другомъ предположеніи два раза (по x въ первомъ случаѣ, по y - во второмъ) уравненіе (11) и опредѣляя $\frac{d^2y}{dx^2}$ и $\frac{d^2x}{dy^2}$, изъ условій (8) получаемъ :

$$\frac{\partial^2 F}{\partial x^2}\left(\frac{\partial F}{\partial y}\right)^2 - 2\frac{\partial^2 F}{\partial x\partial y}\cdot\frac{\partial F}{\partial y}\cdot\frac{\partial F}{\partial x} + \frac{\partial^2 F}{\partial y^2}\left(\frac{\partial F}{\partial x}\right)^2 = 0 \quad \ldots (12)$$

или въ другой формѣ :

$$\Delta = \begin{vmatrix} \frac{\partial^2 F}{\partial x^2} & \frac{\partial^2 F}{\partial x\partial y} & \frac{\partial F}{\partial x} \\ \frac{\partial^2 F}{\partial x\partial y} & \frac{\partial^2 F}{\partial y^2} & \frac{\partial F}{\partial y} \\ \frac{\partial F}{\partial x} & \frac{\partial F}{\partial y} & 0 \end{vmatrix} = 0 \quad \ldots\ldots\ldots (13)$$

Въ тождествѣ условій (12) и (13) легко убѣдиться, раскрывая опредѣлитель Δ. Координаты x, y точекъ перегиба опредѣляются изъ двухъ уравненій (11) и (12) [или (13)]

Пусть кривая, опредѣляемая уравненіемъ (11), въ частности - алгебраическая n - го порядка, такъ что F (x,y) - многочленъ n-й степени. Вводя однородныя координаты x_1, x_2, x_3 (ср. § 2), замѣнемъ уравненіе (11) уравненіемъ

$$\varphi(x_1, x_2, x_3) = 0, \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (14)$$

гдѣ φ - однородный многочленъ n -го измѣренія и

$$\varphi(x_1, x_2, x_3) = x_3^n \cdot F\left(\frac{x_1}{x_3}, \frac{x_2}{x_3}\right) \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (15)$$

Дифференцируя равенство (15) и обозначая производныя перваго и второго порядка функціи φ по перемѣннымъ x_1, x_2, x_3 через $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3, \varphi_{11}, \varphi_{12}, \ldots\ldots$ имѣемъ

$$\Phi_1 = x_3^{n-1}\,\frac{\partial F}{\partial x}\,, \qquad \Phi_2 = x_3^{n-1}\frac{\partial F}{\partial y}$$

$$\Phi_{11} = x_3^{n-2}\frac{\partial^2 F}{\partial x^2}\,, \quad \Phi_{12} = x_3^{n-2}\frac{\partial^2 F}{\partial x\,\partial y}\,, \quad \Phi_{22} = x_3^{n-2}\frac{\partial^2 F}{\partial y^2} \qquad (16)$$

Такъ какъ Φ – однородная функція n – го измѣренія, а Φ_1, Φ_2, Φ_3 – однородныя функціи n – 1-го измѣренія, то по теоремѣ Эйлера имѣемъ :

$$\begin{aligned}(n-1)\,\Phi_1 &= x_1\Phi_{11} + x_2\Phi_{12} + x_3\Phi_{13}\\ (n-1)\,\Phi_2 &= x_1\Phi_{12} + x_2\Phi_{22} + x_3\Phi_{23}\\ (n-1)\,\Phi_3 &= x_1\Phi_{13} + x_2\Phi_{23} + x_3\Phi_{33}\end{aligned} \qquad \ldots\ldots\ldots(17)$$

и кромѣ того

$$x_1\Phi_1 + x_2\Phi_2 + x_3\Phi_3 = n\,\Phi = 0 \qquad \ldots\ldots\ldots(18)$$

для точекъ данной кривой. Замѣняя въ детерминантѣ Δ (13) производныя функціи F пропорціональными имъ производными $\Phi_1, \Phi_2, \Phi_{11}, \Phi_{12}, \Phi_{22}$ въ силу равенствъ (16), затѣмъ умножая послѣдніе столбецъ и строку на (n – 1) и вычитая соотвѣтственно элементы первыхъ двухъ столбцовъ и строкъ, по умноженіи ихъ на x_1 и на x_2, получимъ въ силу равенствъ (17) и (18) послѣ сокращенія на x_3^2 :

$$\begin{vmatrix}\Phi_{11} & \Phi_{12} & \Phi_{13}\\ \Phi_{12} & \Phi_{22} & \Phi_{23}\\ \Phi_{13} & \Phi_{23} & \Phi_{33}\end{vmatrix} = 0 \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(19)$$

Опредѣлитель, находящійся въ лѣвой части равенства, называется опредѣлителемъ Гессе (Hesse). Онъ составленъ изъ вторыхъ производныхъ функціи Φ. Ур-іе (19) опредѣляетъ нѣкоторую кривую, которая называется Гессовой кривой по отношенію къ данной. Точки перегиба алгебраической кривой такимъ образомъ суть точки, пересѣченія ея съ Гессовой кривой.

Примѣръ. Разсмотримъ кривую, опредѣляемую уравненіемъ :

$$y^3 = x$$

Разрѣшая ур-іе относительно у, имѣемъ :

$$y = x^{\frac{1}{3}}$$

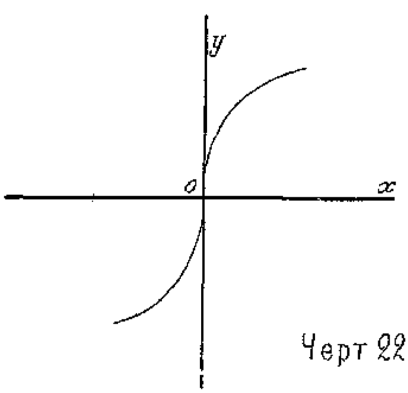
Условіе

$$\frac{d^2y}{dx^2} = 0$$

даетъ намъ

$$x^{-\frac{5}{3}} = 0$$

и слѣдовательно X $= \infty$,т.е. не приводитъ ни къ какой точкѣ перегиба на конечномъ разстояніи. Условіе



Черт 22

$$\frac{d^2x}{dy^2} = 0$$

даетъ намъ

$$6y = 0$$

откуда у = 0 и слѣдовательно X = 0; такимъ образомъ кривая имѣетъ точку перегиба въ началѣ координатъ. Для X = 0, У = 0 имѣемъ $\frac{dx}{dy}$ = 0; слѣдовательно,касательная въ этой точкѣ совпадаетъ съ осью у (ср. Черт. 22).

Эта же самая кривая (кубическая парабола), можетъ быть опредѣлена двумя уравненіями :

$$x = t^3$$
$$y = t$$

Условіе (10) даетъ намъ :

$$3t^2 0 - 6t.1 = 0$$

или $t = 0$, откуда $X = 0$, $Y = 0$, т.е. приходимъ къ прежнему результату.

9. АСИМПТОТЫ.

Пусть кривая опредѣляется уравненіями:

$$\begin{aligned} x &= \varphi(t) \\ y &= \psi(t) \end{aligned} \qquad \ldots\ \ldots \quad (1)$$

гдѣ t произвольный параметръ, и пусть при приближеніи t къ нѣкоторому опредѣленному значенію t_0 (въ частности можетъ быть $t_0 = \infty$)по крайней мѣрѣ одна изъ координатъ X, У, опредѣляемыхъ уравненіями (1), возрастаетъ безгранично по своей абсолютной величинѣ, такъ что имѣемъ

$$\lim_{t=t_0} \varphi(t) = \infty \quad \text{или} \quad \lim_{t=t_0} \psi(t) = \infty$$

или одновременно

$$\lim_{t=t_0} \varphi(t) = \infty$$
$$\lim_{t=t_0} \psi(t) = \infty$$

Въ такомъ случаѣ будемъ говорить, что данная кривая имѣетъ б е з к о н е ч н о - у д а л е н н у ю т о ч к у, соотвѣтствующую значенію параметра $t = t_0$.Понятно, что кривая мо -

жетъ имѣть и нѣсколько безконечно-удаленныхъ точекъ. Разсмотримъ уравненіе касательной въ произвольной точкѣ кривой

$$\frac{X - x}{x'} = \frac{Y - y}{y'}$$

или, послѣ преобразованій,

$$y'X - x'Y = xy' - x'y \qquad \ldots\ldots (2)$$

и будемъ параметръ t приближать къ значенію $t = t_0$. При этомъ наша касательная будетъ перемѣщаться соотвѣтственно перемѣщенію ея точки прикосновенія по данной кривой. Если отношенія коэффиціентовъ уравненія (2), т.е. отношенія

$$y' : -x' : (xy' - x'y)$$

стремятся къ опредѣленнымъ предѣламъ при неограниченномъ приближеніи t къ t_0, то уравненіе (2) для $t = t_0$ опредѣляетъ нѣкоторую прямую, къ которой неограниченно приближается касательная при выше упомянутомъ измѣненіи t. Прямая эта называется асимптотой; ее можно разсматривать (условно) какъ касательную въ безконечно-удаленной точкѣ кривой.

Для того, чтобы опредѣлить асимптоты данной кривой, слѣдуетъ прежде всего найти ея безконечно- удаленныя точки, т. е. тѣ значенія параметра t, которымъ соотвѣтствуютъ безконечныя значенія одной или двухъ координатъ, а затѣмъ произвести изслѣдованіе уравненія касательной для всѣхъ найденныхъ значеній параметра, подобно тому, какъ это было намѣчено выше.

Примѣръ. Разсмотримъ гиперболическую спираль (см. чер. 14), которая въ полярныхъ координатахъ (r , φ) опредѣляется уравненіемъ :

$$r\varphi = a;$$

$$\text{или} \quad r = \frac{a}{\varphi}$$

Перейдемъ отъ полярныхъ координатъ къ Декартовымъ помощью формулъ

$$x = r\cos\varphi\,,\quad y = r\sin\varphi$$

Вставляя значеніе r изъ уравненія спирали, получаемъ :

$$x = \frac{a\cos\varphi}{\varphi}$$

$$y = \frac{a\sin\varphi}{\varphi} \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (3)$$

Равенства (3), въ которыхъ разсматриваемъ φ какъ произвольный параметръ, опредѣляютъ гиперболическую спираль съ Декартовыхъ координатахъ. Приближая φ къ нулю, имѣемъ

$$\lim_{\varphi=0} x = \infty\,,\quad \lim_{\varphi=0} y = a\lim_{\varphi=0}\frac{\sin\varphi}{\varphi} = a$$

Такимъ образомъ имѣемъ безконечно-удаленную точку, соотвѣтствующую значенію параметра φ =0. Для того, чтобы найти асимптоту въ этой точкѣ, пишемъ уравненіе касательной въ произвольной точкѣ спирали, для чего опредѣляемъ производныя :

$$x' = \frac{dx}{d\varphi} = \frac{a}{\varphi^2}\left(-\varphi\sin\varphi - \cos\varphi\right) = -\frac{a}{\varphi^2}\left(\varphi\sin\varphi + \cos\varphi\right).$$

$$y' = \frac{dy}{d\varphi} = \frac{a}{\varphi^2}\left(\varphi\cos\varphi - \sin\varphi\right).$$

Составляя выраженіе $xy' - x'y$, имѣемъ

$$xy' - x'y = \frac{a^2}{\varphi^3}\left[\varphi\cos^2\varphi - \sin\varphi\cos\varphi + \varphi\sin^2\varphi + \right.$$
$$\left. + \sin\varphi\cos\varphi\right] = \frac{a^2}{\varphi^2}$$

Сопоставляя полученные результаты, приходимъ къ соотношеніямъ :

$$y' : -x' : (xy' - x'y) = (\varphi\cos\varphi - \sin\varphi) : (\varphi\sin\varphi + \cos\varphi) : a$$

и слѣдовательно уравненіе касательной принимаетъ видъ :

$$(\varphi\cos\varphi - \sin\varphi)X + (\varphi\sin\varphi + \cos\varphi)Y = a$$

Полагая здѣсь $\varphi = 0$, получаемъ уравненіе асимптоты

$$Y = a$$

Такимъ образомъ, гиперболическая спираль имѣетъ асимптоту параллельную оси X и отстоящую отъ нея на разстояніи $= a$.

Предположимъ, что кривая опредѣляется уравненіемъ

$$y = f(x) \qquad (4)$$

въ Декартовыхъ координатахъ. Для опредѣленія асимптотъ можно повторить всѣ предъидущія разсужденія, полагая лишь въ частности параметръ $t = x$. Безконечно-удаленныя точки кривой могутъ соотвѣтствовать безконечному или конечному значенію абсциссы X, и соотвѣтственно этому удобнѣе отдѣльно разсмотрѣть два случая. Первый изъ нихъ характеризуется тѣмъ, что изъ уравненія (4) для $X = \infty$ имѣемъ:

$$\lim_{x=\infty} y = \infty \quad \text{или} \quad \lim_{x=\infty} y = b$$

гдѣ b - конечное опредѣленное число; во второмъ случаѣ для нѣкотораго конечнаго значенія $x = a$ имѣемъ:

$$\lim_{x=a} y = \infty$$

Разсмотримъ первый случай. Уравненіе касательной напишемъ въ видѣ

$$Y = f'(x)X + f(x) - f'(x)x \qquad (5)$$

и перейдемъ къ предѣлу, полагая $x = \infty$. Если при этомъ

$$\lim_{x=\infty} f'(x) = K$$

$$\lim_{x=\infty} [f(x) - xf'(x)] = m$$

гдѣ K и m - опредѣленныя конечныя числа, то для разсматриваемой безконечно-удаленной точки асимптота существуетъ и уравненіе ея имѣетъ видъ :

$$Y = kX + m \tag{6}$$

Указаннымъ пріемомъ мы, очевидно, не можемъ найти асимптотъ параллельныхъ оси у, такъ какъ уравненіе всякой прямой, параллельной оси ординатъ, не содержитъ координаты у и слѣдовательно не можетъ быть представлено въ видѣ (6), разрѣшеннымъ относительно у. Съ другой стороны, очевидно, что для безконечно-удаленныхъ точекъ кривой, соотвѣтствующихъ безконечнымъ значеніямъ абсциссы, не можетъ получиться асимптотъ параллельныхъ оси у, такъ какъ всѣ точки прямой, параллельной оси у, имѣютъ одну и ту же конечную абсциссу. Такимъ образомъ, мы имѣли право въ первомъ разсмотрѣнномъ нами случаѣ предположить уравненіе касательной въ видѣ (5), разрѣшеннымъ относительно у. Для того, чтобы найти асимптоты, параллельныя оси у (если онѣ существуютъ), слѣдуетъ обратиться ко второму случаю, т.е. разсмотрѣть безконечно-удаленныя точки, соотвѣтствующія конечнымъ значеніямъ абсциссы.

Итакъ, предполагаемъ, что для $x = a$

$$\lim_{x=a} y = \lim_{x=a} f(x) = \infty$$

Очевидно, что для опредѣленія асимптоты можно повторить всѣ предъидущія разсужденія, замѣняя лишь вездѣ X черезъ y и обратно, т.е. предполагая уравненіе кривой разрѣшеннымъ относительно X и соотвѣтственно этому уравненіе касательной въ видѣ

$$X = \frac{dx}{dy} Y + x - y\frac{dx}{dy},$$

Такъ какъ для разсматриваемой безконечно-удаленной точки надо положить $y = \infty$ и x - конечнымъ, то, разъ асимптота существуетъ, производная $\frac{dx}{dy}$ необходимо должна имѣть предѣломъ нуль, ибо въ противномъ случаѣ свободный членъ

$$x - y\frac{dx}{dy}$$

не можетъ стремиться къ конечному предѣлу. Отсюда явствуетъ, что асимптота, если она существуетъ, параллельна оси y.

Примѣръ. Разсмотримъ равностороннюю гиперболу; уравненіе ея возьмемъ въ видѣ

$$xy = a^2 \qquad \text{откуда}$$
$$y = \frac{a^2}{x}$$

дифференцируя, получаемъ :

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{a^2}{x^2}$$

Уравненіе касательной имѣетъ видъ :

$$Y = -\frac{a^2}{x^2}X + \frac{a^2}{x} + \frac{a^2}{x^2}x = -\frac{a^2}{x^2}X + \frac{2a^2}{x}$$

Полагая $X = \infty$, получаемъ уравненіе асимптоты

$$Y = 0$$

Въ симметріи уравненія гиперболы относительно X и Y непосредственно очевидно, что для $Y = \infty$ совершенно аналогично получимъ уравненіе другой асимптоты

$$X = 0$$

Такимъ образомъ, гипербола имѣетъ двѣ асимптоты, совпадающія съ осями координатъ.

Предположимъ, что имѣемъ алгебраическую кривую n - го порядка.

Для опредѣленія асимптотъ замѣтимъ предварительно, что каждая асимптота пересѣкаетъ кривую только въ n - 2 точкахъ, лежащихъ на конечномъ разстояніи. Дѣйствительно, касательная въ произвольной точкѣ кривой пересѣкаетъ ее въ n - 2 точкахъ; остальныя двѣ точки пересѣченія сливаются въ точкѣ прикосновенія. Удаляя безгранично точку прикосновенія по кривой, получаемъ въ предѣлѣ асимптоту, которая слѣдовательно будетъ пересѣкать кривую въ n - 2 точкахъ на конечномъ разстояніи и въ двухъ слившихся безконечно-удаленныхъ точкахъ.

Исходя изъ этого замѣчанія, легко выведемъ общій пріемъ, посредствомъ котораго можемъ найти всѣ асимптоты алгебраической кривой n -го порядка

$$\mathcal{F}(x, y) = 0 \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (7)$$

Разсмотримъ совмѣстно съ уравненіемъ (7) уравненіе прямой

$$y = kx + b \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (8)$$

Абсциссы точекъ пересѣченія этой прямой съ данной кривой опредѣляются изъ уравненія

$$\mathcal{F}(x, kx + b) = 0, \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots (9)$$

получаемаго подстановкой въ уравненіе (7) значенія y, получаемаго изъ уравненія (8). Въ раскрытомъ видѣ уравненіе(9) напишется такъ :

$$A_0 x^n + A_1 x^{n-1} + A_2 x^{n-2} + \ldots\ldots + A_{n-1} x + A_n = 0, \qquad (10).$$

при чемъ въ коэффиціенты A_0, A_1, A_2 ....войдутъ К и b. Рѣшая уравненіе (10), получимъ n значеній X и слѣдовательно n точекъ пересѣченія прямой (8) съ данной кривой линіей. Для того, чтобы прямая (8) была асимптотой, необходимо, чтобы она пересѣкала кривую (7) только въ (n - 2) точкахъ на конечномъ разстояніи и въ двухъ слившихся точкахъ въ безконечности ; для этого въ свою очередь необходимо, чтобы уравненіе (10) имѣло только (n - 2) конечныхъ корня, а остальные два корня обратились бы въ безконечность. Требованіе это выполняется, если уравненіе (10), которое вообще - n -й степени, обратится въ уравненіе (n - 2) - й степени, т.е. если

$$A_0 = 0 \quad , \quad A_1 = 0 \qquad \dots\dots\dots\dots\dots\dots (11)$$

Условія (11) представляютъ изъ себя два уравненія, содержащія К и b; рѣшая ихъ, находимъ одну или нѣсколько системъ значеній К, b, а слѣдовательно одну или нѣсколько дѣйствительныхъ или мнимыхъ асимптотъ, опредѣляемыхъ уравненіемъ (8).

Очевидно, мы не получимъ этимъ пріемомъ асимптотъ, параллельныхъ оси у. Для того, чтобы ихъ не упустить изъ виду, слѣдуетъ повторить предъидущія разсужденія, измѣняя вездѣ X на У и обратно, т.е. предполагая уравненіе прямой въ видѣ

$$x = Ky + a$$

При этомъ, если желаемъ опредѣлить только асимптоты параллельныя оси У, то можемъ ограничиться уравненіемъ вида

$$x = a .$$

Вставляя вмѣсто X его значеніе въ уравненіе (7), мы имѣемъ :

$$F(a, y) = 0 , \qquad (12)$$

и въ этомъ уравненія должны исчезать члены двухъ высшихъ степеней относительно у. Очевидно, это возможно лишь въ томъ случаѣ, если уравненіе (7) не содержитъ члена съ n -й степенью у, такъ какъ коэффиціентъ при этомъ членѣ не содержитъ Х и слѣдовательно не можетъ обратиться въ нуль при подстановкѣ вмѣсто Х подходящаго частнаго значенія а. Такимъ образомъ кривая n - го порядка можетъ имѣть асимптоту, параллельную оси у, только въ томъ случаѣ, если уравненіе ея не содержитъ члена съ y^n ; аналогично, асимптота, параллельная оси Х, можетъ существовать только въ томъ случаѣ, если уравненіе не содержитъ члена съ X^n

Примѣчаніе. Можетъ случиться, что значеніе К, полученное изъ уравненія $A_0 = 0$ (A_0 ,очевидно, не содержитъ b), обращаетъ A_1 въ нуль при любомъ значеніи b , такъ что b уже не опредѣляется изъ системы (11). Для общности предположимъ, что это значеніе К обращаетъ въ нуль цѣлый рядъ коэффиціентовъ A_1 , A_2 ,.... A_{m-1} , и первый не исчезающій коэффиціентъ уравненія (10) есть A_m .Тогда всѣ прямыя, опредѣляемыя уравненіемъ (8) при упомянутомъ значеніи К и произвольномъ b ,пересѣкаютъ данную кривую въ m слившихся безконечно-удаленныхъ точкахъ; эта система параллельныхъ прямыхъ должна быть разсматриваема какъ пучокъ сѣкущихъ, проходящихъ черезъ одну безконечно-удаленную точку кривой и пересѣкающихъ въ ней кривую m разъ - (въ нормальномъ случаѣ, разобранномъ выше , $m = 1$) . Чтобы выдѣлить изъ этой системы асимптоты, надо потребовать, чтобы еще одна точка пересѣченія $\left((m+1) - n\right)$ слилась съ безконечно- удаленной точкой, а это требованіе приводитъ къ уравненію $A_m = 0$, откуда и опредѣляется одно или нѣсколько значеній b и, слѣдовательно, одна или нѣсколько асимптотъ.

П р и м ѣ р ъ . Разсмотримъ кривую, называемую Д е к а р т о в ы м ъ л и с т о м ъ и опредѣляемую уравненіемъ $x^3 + y^3 = 3axy$ - (черт. 23).

Рѣшая уравненіе Декартова листа совмѣстно съ уравненіемъ

$$y = kx + b$$

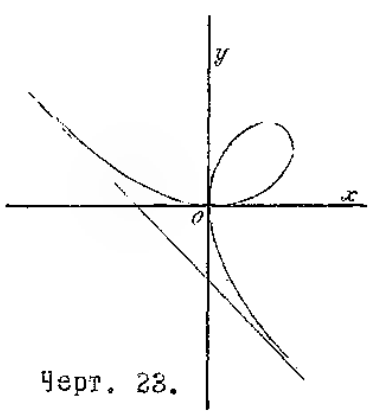
получаемъ :

$$x^3 + k^3x^3 + 3k^2bx^2 + 3kb^2x + b^3 - 3akx^2 - 3abx = 0$$

Приравнивая нулю коэффиціенты при x^3 и x^2, имѣемъ :

$$1 + k^3 = 0 \ , \quad 3k^2b - 3ak = 0$$

Изъ перваго уравненія получаемъ единственное дѣйствительное значеніе для k, а именно:



Черт. 23.

$$k = -1 ;$$

вставляя во второе, получаемъ :

$$b = -a$$

Такимъ образомъ, Декартовъ листъ имѣетъ асимптоту

$$y = -x - a$$

или

$$x + y + a = 0$$

Полагая въ послѣднемъ уравненіи $x = 0$, имѣемъ $y = -a$; полагая $y = 0$, получаемъ $x = -a$; слѣдовательно асимптота пересѣкаетъ оси x и y въ области отрицательныхъ значеній координатъ, ту и другую на разстояніи a отъ начала

10. ОСОБЫЯ ТОЧКИ; ОСОБЫЯ КАСАТЕЛЬНЫЯ.

Ограничимся въ дальнѣйшемъ исключительно аналитическими кривыми. Функціи, входящія въ уравненія этихъ кривыхъ, допускаютъ вообще единственное разложеніе въ рядъ Тэйлора въ области любыхъ значеній перемѣнныхъ. Но возможны и такія исключительныя значенія перемѣнныхъ, въ области которыхъ аналитическая функція этихъ перемѣнныхъ или вовсе не разлагается въ рядъ Тэйлора или допускаетъ нѣсколько различныхъ разложеній; такія значенія называютъ о с о б ы м и значеніями, и мы до сихъ поръ вообще исключали ихъ изъ разсмотрѣнія.

Предполагая уравненіе кривой въ видѣ

$$y = f(x) \qquad (1)$$

допустимъ, что $x = x_0$ есть особое значеніе для функціи $f(x)$, и разсмотримъ точку кривой, опредѣляемую координатами x_0 и $y_0 = f(x_0)$. При этомъ возможны два различныхъ случая.

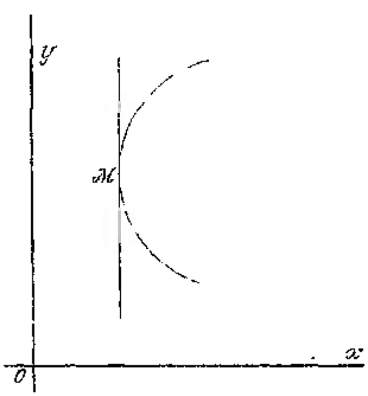
Во - первыхъ, можетъ оказаться, что при переходѣ къ новой системѣ осей x', y' особенность, съ которой мы имѣемъ дѣло, исчезаетъ, т.е. другими словами, абсцисса x'_0 изслѣдуемой точки относительно новой системы координатъ не принадлежитъ къ числу особыхъ значенiй функцiи $f_1(x')$, входящей въ правую часть преобразованнаго уравненiя.

$$y' = f_1(x')$$

Въ такомъ случаѣ изслѣдуемая точка ничѣмъ не выдѣляется изъ совокупности всѣхъ остальныхъ ; она есть о б ы к н о в е н н а я точка кривой. Подобный случай имѣетъ мѣсто, если въ точкѣ (x_0 , y_0) данная кривая допускаетъ единственную, вполнѣ опредѣленную касательную, но параллельную оси y (ср. чер. 24); дѣйствительно производная

$$\frac{dy}{dx} = f'(x),$$

въ такой точкѣ равна безконечности (какъ тангенсъ прямого угла), и слѣдовательно функцiя $f(x)$ не допускаетъ разложенiя въ рядъ Тейлора по степенямъ ($x - x_0$), если же мы измѣнимъ систему координатъ, принявъ прежнюю ось x за ось y и обратно, то для той же точки будемъ имѣть



Чер 24.

$$\frac{dy}{dx} = tg\,0 = 0$$

и особенность исчезаетъ.

Во - вторыхъ, можетъ казаться, что никакимъ преобразованiемъ координатъ мы не можемъ достигнуть того, чтобы въ области разсматриваемой точки правая часть уравненія данной кривой разлагалась въ рядъ Тэйлора, при томъ единственнымъ способомъ ; другими словами, особенность, съ которой мы имѣемъ дѣло, не устранима преобразованіемъ координатъ. Точки (x_0 , y_0) такого рода будемъ называть о с о б ы м и точками кривой

Для изслѣдованія этихъ точекъ естественно перейти къ другому способу аналитическаго представленія данной кривой, а именно опредѣлить ее уравненіемъ вида

$$\mathcal{F}(x,y)=0 \qquad (2)$$

При этомъ возможны два случая: во- первыхъ можетъ оказаться, что, не смотря на извѣстный произволъ въ выборѣ функціи $\mathcal{F}$ въ уравненіи (2) координаты x_0 , y_0 изслѣдуемой точки всегда будутъ о с о б ы м и значеніями для функціи $\mathcal{F}$. Во - вторыхъ, можетъ оказаться, что функція $\mathcal{F}$, входящая въ лѣвую часть уравненія (2), разлагается единственнымъ способомъ въ рядъ Тэйлора по степенямъ ($x - x_0$) и ($y - y_0$). Первый изъ упомянутыхъ случаевъ имѣетъ мѣсто, если x_0 есть, такъ называемое с у щ е с т в е н н о - о с о б о е значеніе перемѣннаго x для функціи f (x) , входящей въ уравненіе (1). Особыя точки этого рода мы пока оставимъ въ сторонѣ ; вслѣдствіе невозможности примѣнить къ ихъ изслѣдованію ряда Тэйлора, трудно и получить какіе - либо общіе результаты, относящіяся къ точкамъ этого типа. Замѣтимъ, что алгебраическія кривыя допускаютъ исключительно особыя точки второй категоріи, такъ какъ уравненіе всякой алгебраиче -

ской кривой можетъ быть приведено къ виду

$$\mathcal{F}(x, y) = 0$$

гдѣ $\mathcal{F}$ - цѣлая раціональная функція (многочленъ), а извѣстно, что цѣлая раціональная функція разлагается въ конечный рядъ Тэйлора въ области любой системы значеній (x_0 , y_0) перемѣнныхъ. Прежде чѣмъ переходить къ изслѣдованію особыхъ точекъ, разсмотримъ три примѣра для иллюстраціи предшествующихъ общихъ соображеній.

Примѣръ 1. Разсмотримъ параболу

$$y^2 = 2px$$

Рѣшая уравненіе относительно y, имѣемъ :

$$y = \sqrt{2p} \cdot x^{\frac{1}{2}}$$

для $x = 0$, имѣемъ $y = 0$. Легко видѣть, что $x = 0$ есть особое значеніе для функціи $y = \sqrt{2p} \cdot x^{\frac{1}{2}}$; дѣйствительно

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{2}\sqrt{2p} \cdot x^{-\frac{1}{2}}$$

и для $x = 0$ имѣемъ :

$$\frac{dy}{dx} = \infty$$

измѣнимъ оси, полагая

$$x = y', \quad y = x'$$

Тогда получимъ уравненіе

$$x'^2 = 2py'$$

откуда

$$y' = \frac{1}{2p} \cdot x'^2$$

точкѣ $x = 0$, $y = 0$ соотвѣтствуетъ точка $x' = 0$, $y' = 0$. очевидно значеніе $x' = 0$ не принадлежитъ къ числу особыхъ значеній для функціи y', такъ какъ y' разложено въ конечный рядъ Тэйлора по степенямъ x. Такимъ образомъ, точка $x=0, y=0$ есть обыкновенная точка параболы.

$$y^2 = 2px$$

Касательная въ этой точкѣ, очевидно, совпадаетъ съ осью y.

Примѣръ 2. Разсмотримъ кривую

$$y = x^{\frac{3}{2}}$$

Не трудно убѣдиться, что значеніе $x = 0$ есть особое значеніе для функціи $x^{\frac{3}{2}}$; дѣйствительно, для $x = 0$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{3}{4} x^{-\frac{1}{2}} = \infty$$

и слѣдовательно y не разложимо въ рядъ Тэйлора по степенямъ x. Не трудно бы было убѣдиться и въ томъ, что особенность, съ которой мы имѣемъ дѣло, не устранима преобразованіемъ координатъ. Такимъ образомъ точка $x = 0$, $y = 0$ есть особая точка данной кривой. Написавъ уравненіе кривой въ видѣ

$$y^2 - x^3 = 0$$

легко убѣждаемся, что эта точка не принадлежитъ къ числу существенно - особыхъ.

Примѣръ 3. Разсмотримъ кривую

$$y^2 = (x+1) x^2$$

Рѣшая уравненіе относительно y, имѣемъ

$$y = \pm x (1+x)^{\frac{1}{2}}$$

Каждому значенію x соотвѣтствуютъ два значенія y, отличающіяся знакомъ; эти два значенія сливаются для $x = 0$, т.к.

при этомъ имѣемъ $y = 0$. Разлагая въ рядъ по степенямъ x, хотя бы по формулѣ бинома, второй факторъ правой части, получимъ два различныхъ разложенія :

$$y = x + \frac{1}{2} x^2 - \frac{1}{8} x^3 + \frac{1}{16} x^4 - \ldots$$

$$y = -x - \frac{1}{2} x^2 + \frac{1}{8} x^3 - \frac{1}{16} x^4 + \ldots$$

Оба они для $x = 0$ даютъ $y = 0$. Такимъ образомъ въ области точки (0, 0) имѣемъ два различныхъ ряда Тэйлора; не трудно убѣдиться, что преобразованіе координатъ не можетъ насъ избавить отъ этой особенности; точка (0, 0), такимъ образомъ , - особая .

Предполагая уравненіе кривой въ видѣ

$$F(X, Y) = 0 \qquad (2)$$

обращаемся къ изслѣдованію такихъ особыхъ точекъ (x, y), въ области которыхъ функція $F(X, Y)$ разлагается въ рядъ Тэйлора; при этомъ мы разъ на всегда исключаемъ изъ разсмотрѣнія безконечно-удаленныя точки, изслѣдованіе которыхъ потребовало - бы введеніе однородныхъ координатъ, и слѣдовательно во всемъ дальнѣйшемъ предполагаемъ, что x и y имѣютъ исключительно конечныя значенія. Рѣшая уравненіе (2) мы получаемъ уравненіе кривой въ видѣ :

$$Y = f(X) ; \qquad (1)$$

или въ видѣ

$$X = f_1(Y) ;$$

при этомъ, вообще говоря, функціи $f(X)$ и $f_1(Y)$ разложимы, каждая единственнымъ спооообомъ, въ ряды Тэйлора въ области значеній x и y, соотвѣтствующихъ разсматриваемой точкѣ. Но, если точка (x, y) есть особая, то, согласно предъидущему, такія разложенія не должны имѣть мѣста, а для этого, какъ извѣстно изъ теоріи функцій, частныя производныя

$$\frac{\partial \mathcal{F}}{\partial x} \quad \text{и} \quad \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial y}$$

лѣвой части уравненія (1) должны обращаться въ нуль для координатъ точки (x , y); обратно, если для координатъ точки (x, y) имѣемъ одновременно

$$\frac{\partial \mathcal{F}}{\partial x} = 0 , \quad \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial y} = 0 \qquad (3)$$

то эта точка есть особая точка кривой [1] Мы видѣли, что касательная въ точкѣ (x , y) опредѣляется уравненіемъ

$$\frac{\partial \mathcal{F}}{\partial x}(\mathcal{X} - x) + \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial y}(\mathcal{Y} - y) = 0 \qquad (4)$$

гдѣ $\mathcal{X}$ и $\mathcal{Y}$ - текущія координаты; если имѣемъ одновременно

$$\frac{\partial \mathcal{F}}{\partial x} = 0 \quad , \quad \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial y} = 0 \qquad (3)$$

то уравненіе (4) обращается въ тождество, и слѣдовательно мы встрѣчаемся съ неопредѣленностью при изысканіи касательной въ точкѣ (x, y).

- - - - - - - - - - -

1) При этомъ мы лишь предполагаемъ, что условія (4.) не выполняются для в с я к о й точки данной кривой. Подобный случай мы бы имѣли, напр., если бы уравненія (2) имѣло видъ $f^n = 0$, гдѣ $f(x, y)$ - многочленъ , а n - цѣлое положительное число > 1. Дѣйствительно, условія (4) принимаютъ здѣсь видъ :

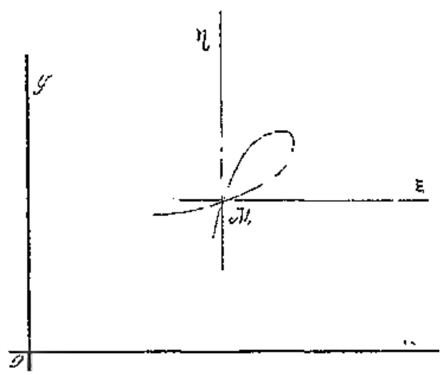
$$n f^{n-1} \frac{\partial f}{\partial x} = 0 , \quad n f^{n-1} \frac{\partial f}{\partial y} = 0$$

Отсюда слѣдуетъ, что особыя точки того класса, который мы изслѣдуемъ, можно опредѣлить, какъ такія точки, для которыхъ задача изысканія касательной приводитъ къ неопредѣленности.

Изслѣдованіе особой точки (x , y') наиболѣе удобно вести, перенося въ нее начало координатъ, т.е. полагая старыя координаты $\mathcal{X}$ и $\mathcal{Y}$ равными

$$\mathcal{X}=x+\xi\ ,\quad \mathcal{Y}=y+\eta,$$

гдѣ ξ , η координаты относительно новой системы осей, параллельныхъ осямъ первоначальной системы (ср. черт. 25).



Черт. 25.

Для точекъ кривой, достаточно близкихъ къ изслѣдуемой точкѣ М координаты ξ, η достаточно малы по абсолютной величинѣ (для точки М имѣемъ ξ = 0, η =0)

и слѣд. выполняются для всѣхъ точекъ данной кривой. Всегда возможно избѣжать подобнаго случая, замѣняя данное уравненіе равносильнымъ ему, но болѣе простымъ.

такъ что функція

$$\mathcal{F}(X, Y) = \mathcal{F}(\xi + x, \eta + y)$$

разложима въ рядъ Тэйлора (Маклорена) по степенямъ ξ , η и слѣдовательно уравненіе кривой можетъ быть написано въ видѣ:

$$\mathcal{F}(x,y) + \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial x}\cdot\xi + \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial y}\cdot\eta + \frac{1}{1.2}\left(\xi^2\frac{\partial^2\mathcal{F}}{\partial x^2} + 2\xi\eta\frac{\partial^2\mathcal{F}}{\partial x\partial y} + \eta^2\frac{\partial^2\mathcal{F}}{\partial y^2} + \dots = 0\right.$$

или

$$\frac{\partial \mathcal{F}}{\partial x}\,\xi + \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial y}\cdot\eta + \frac{1}{1.2}\left(\xi^2\frac{\partial^2\mathcal{F}}{\partial x^2} + 2\xi\eta\frac{\partial^2\mathcal{F}}{\partial x\partial y} + \eta^2\frac{\partial^2\mathcal{F}}{\partial y^2}\right) + \dots = 0$$

такъ какъ точка (x, y) лежитъ на данной кривой и слѣдовательно

$$\mathcal{F}(x,y) = 0$$

Будемъ для сокращенія обозначать частныя производныя функціи $\mathcal{F}$ по x и y, по подстановкѣ координатъ x, y точки M, черезъ $\mathcal{F}$ со значками 1 и 2, при чемъ значекъ 1 пишемъ столько разъ, сколько разъ приходится дифференцировать по x, а значекъ 2, -сколько разъ дифференцируемъ по y. Такимъ образомъ полагаемъ.

$$\frac{\partial \mathcal{F}}{\partial x} = \mathcal{F}_1,\ \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial y} = \mathcal{F}_2,\ \frac{\partial^2 \mathcal{F}}{\partial x^2} = \mathcal{F}_{11},\ \frac{\partial^2 \mathcal{F}}{\partial x\partial y} = \mathcal{F}_{12},\ \frac{\partial^2 \mathcal{F}}{\partial y^2} = \mathcal{F}_{22}$$

$$\frac{\partial^3 \mathcal{F}}{\partial x^3} = \mathcal{F}_{111},\ \frac{\partial^3 \mathcal{F}}{\partial x^2\partial y} = \mathcal{F}_{112},\ \frac{\partial^3 \mathcal{F}}{\partial x\partial y^2} = \mathcal{F}_{122}\ \text{и т.д.}$$

Уравненіе кривой окончательно напишемъ въ видѣ

$$\mathcal{F}_1\xi + \mathcal{F}_2\eta + \frac{1}{1.2}\left(\mathcal{F}_{11}\xi^2 + 2\mathcal{F}_{12}\xi\eta + \mathcal{F}_{22}\eta^2\right) +$$
$$+ \frac{1}{1.2.3}\left(\mathcal{F}_{111}\xi^3 + 3\mathcal{F}_{112}\xi^2\eta + 3\mathcal{F}_{122}\xi\eta^2 + \mathcal{F}_{222}\eta^3\right) + \dots\dots = 0 \qquad (5)$$

Будемъ изслѣдовать пересѣченіе кривой со всевозможными прямыми, проходящими черезъ точку M. Такъ какъ точка эта есть начало координатъ въ системѣ ξ, η, то прямая, проходящая черезъ M, опредѣляется уравненіями

$$\xi = \lambda t, \eta = \mu t \qquad (6)$$

гдѣ t - произвольный параметръ, а λ и μ - постоянныя. Исключая t изъ равенствъ (6), приходимъ къ уравненію прямой въ его обычномъ видѣ:

$$\eta = \frac{\mu}{\lambda}\xi \qquad (7)$$

Для опредѣленія точекъ пересѣченія данной кривой съ прямой, проведенной нами, мы должны вставить значенія ξ, η, изъ равенствъ (6) въ уравненіе (5); мы тогда получимъ уравненіе, изъ котораго найдемъ значенія t, соотвѣтствующія точкамъ пересѣченія; вставляя эти значенія въ формулы (6), мы получимъ координаты ξ, η точекъ пересѣченія. Предположимъ, сначала, что точка M есть обыкновенная точка кривой. Въ такомъ случаѣ $\mathcal{F}_1$ и $\mathcal{F}_2$ въ уравненіи (5) кривой не могутъ одновременно исчезать и слѣдовательно уравненіе для t

$$(\mathcal{F}_1\lambda + \mathcal{F}_2\mu)t + \frac{1}{1.2}(\mathcal{F}_{11}\lambda^2 + 2\mathcal{F}_{12}\lambda\mu + \mathcal{F}_{22}\mu^2)t^2 + \\ + \frac{1}{1.2.3}(\mathcal{F}_{111}\lambda^3 + 3\mathcal{F}_{112}\lambda^2\mu + 3\mathcal{F}_{122}\lambda\mu^2 + \mathcal{F}_{222}\mu^3)t^3 + \dots = 0 \qquad (8)$$

получаемое такъ, какъ было указано выше, содержитъ вообще говоря первую степень t. Мы видимъ, что одинъ изъ корней этого уравненія есть $t = 0$, а всѣ остальные отличны отъ нуля. Корень $t = 0$ соотвѣтствуетъ значеніямъ $\xi = 0$, $\eta = 0$, т.е. точкѣ M, и слѣдовательно прямыя, проходящія черезъ эту точку, пересѣкаютъ данную кривую одинъ разъ въ M, а затѣмъ въ другихъ точкахъ, отличныхъ отъ M. Если бы мы пожелали, чтобы одна изъ этихъ остальныхъ точекъ пересѣченія слилась съ точкой M, т.е.

чтобы прямая пересѣкала данную кривую въ М въ двухъ слившихся точкахъ, то намъ слѣдовало бы выбрать постоянныя λ и μ такъ, чтобы въ уравненіи (8) исчезъ коэффиціентъ при первой степени t, т.е. чтобы имѣло мѣсто равенство

$$F_1\lambda + F_2\mu = 0 \qquad (9)$$

Дѣйствительно, лѣвая часть уравненія (8) въ такомъ случаѣ дѣлится на t^2, и слѣдовательно уравненіе допускаетъ д в у - к р а т н ы й корень $t=0$. Изъ соотношенія (9) получаемъ:

$$\frac{\mu}{\lambda} = -\frac{F_1}{F_2}$$

и слѣд. въ точкѣ М существуетъ одна прямая, опредѣляемая ур-іем

$$\eta = -\frac{F_1}{F_2}\xi$$

или

$$F_1\xi + F_2\eta = 0 = F_1(X-x) + F_2(Y-y), \qquad (10)$$

которая въ точкѣ М пересѣкаетъ кривую въ двухъ слившихся точках Очевидно, эта прямая есть касательная, какъ это впрочемъ, явствуетъ и изъ ея уравненія (10).

Предположимъ теперь, что М есть особая точка, такъ что для нея имѣютъ мѣсто равенства

$$F_1 = 0, \quad F_2 = 0,$$

и пусть изъ числа трехъ производныхъ F_{11}, F_{12}, F_{22}, по крайней мѣрѣ одна отлична отъ нуля. Тогда уравненіе кривой (5) принимаетъ видъ

$$\frac{1}{1.2}\left(F_{11}\xi^2 + 2F_{12}\xi\eta + F_{22}\eta^2\right) + \frac{1}{1.2.3}\left(F_{111}\xi^3 + 3F_{112}\xi^2\eta + 3F_{122}\xi\eta^2 + F_{222}\eta^3\right) + \dots = 0 \qquad (11)$$

а уравненіе (8), опредѣляющее значенія параметра t для точекъ пересѣченія, обращается въ

$$\frac{1}{1.2}\left(F_{11}\lambda^2 + 2F_{12}\lambda\mu + F_{22}\mu^2\right)t^2 +$$
$$+ \frac{1}{1.2.3}\left(F_{111}\lambda^3 + 3F_{112}\lambda^2\mu + 3F_{122}\lambda\mu^2 + F_{222}\mu^3\right)t^3 + \dots = 0 \qquad (12)$$

Такъ какъ это уравненіе для всякихъ значеній λ , μ допускаетъ двукратный корень t =о, то слѣдовательно всякая прямая, проходящая черезъ точку М, имѣетъ въ ней д в ѣ слившихся общихъ точки съ данной кривой и слѣдовательно, съ извѣстной точки зрѣнія, можетъ быть разсматриваема, какъ касательная. Точка М подобнаго типа называется д в у к р а т н о й или д в о й н о й точкой. Если въ частности постоянныя λ и μ удовлетворяютъ условію

$$F_{11}\lambda^2+2F_{12}\lambda\mu+F_{22}\mu^2=0 \tag{13}$$

то уравненіе (12) допускаетъ трехкратный корень t =о и слѣдовательно соотвѣтствующая прямая имѣетъ въ точкѣ М съ данной кривой т р и слившихся общихъ точки. Уравненіе (13) по раздѣленіи на λ^2 обращается въ квадратное уравненіе

$$F_{11}+2F_{12}\left(\frac{\mu}{\lambda}\right)+F_{22}\left(\frac{\mu}{\lambda}\right)^2=0 \tag{14}$$

относительно $\frac{\mu}{\lambda}$ и слѣдовательно, черезъ двукратную точку проходятъ д в ѣ прямыя, имѣющія въ этой точкѣ съ данной кривой т р и слившихся общихъ точки. Эти двѣ прямыя и называются к а с а т е л ь н ы м и въ тѣсномъ смыслѣ слова. Такимъ образомъ, въ двойной точкѣ существуютъ д в ѣ касательныхъ, дѣйствительныхъ, мнимыхъ или совпадающихъ, въ зависимости отъ того, имѣетъ ли квадратное уравненіе (14) два дѣйствительныхъ, два мнимыхъ или два равныхъ корня. Умножая уравненіе (13) на

t^2 и замѣчая, что

$$ty = \xi, \quad tx = \eta,$$

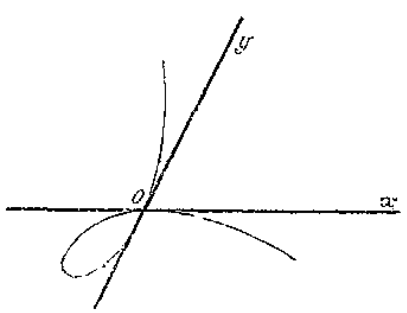
получаемъ уравненіе

$$\mathcal{F}_{11}\xi^2 + 2\mathcal{F}_{12}\xi\eta + \mathcal{F}_{22}\eta^2 = 0 \qquad (15)$$

которое однородно относительно ξ, η, и слѣдовательно опредѣляетъ пару прямыхъ, проходящихъ черезъ точку M; прямыя эти, очевидно, – не что иное, какъ двѣ касательныхъ кривой въ данной точкѣ M. Въ случаѣ

$$\mathcal{F}_{12}^2 - \mathcal{F}_{11}\mathcal{F}_{22} > 0$$

эти двѣ касательныхъ дѣйствительны и различны между собою, а такъ какъ касательныя мы получаемъ, разсматривая пучокъ сѣкущихъ, проходящихъ черезъ точку M и заставляя одну изъ точекъ пересѣченія, отличныхъ отъ M, совпасть съ M, то, очевидно, что данной кривой возможно двумя различными путями притти въ точку M, т.е. кривая два раза проходитъ черезъ эту точку, пересѣкаясь сама съ собою. Двойная точка такого рода называется у з л о м ъ или узловой точкой (см. чер. 26).



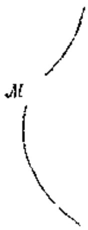
Черт. 26

Въ случаѣ

$$\mathcal{F}_{12}^2 - \mathcal{F}_{11}\mathcal{F}_{22} < 0$$

касательныя въ двойной точкѣ – мнимыя, откуда ясно, что на данной кривой не должно существовать дѣйствительныхъ точекъ въ смежности съ двойной точкой этого типа, которая, такимъ образомъ, является отдѣльной, уединенно точкой кривой. Двойная точка такого рода называется и з о л и р о в а н н о й точкой (см. чер. 27). Наконецъ, въ случаѣ

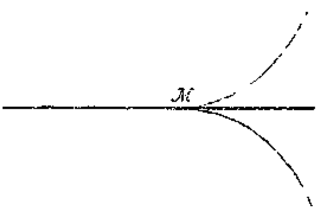
$$\mathcal{F}_{12}^{2}-\mathcal{F}_{11}\mathcal{F}_{22}=0$$



касательныя въ двойной точкѣ сливаются въ одну прямую, и точки подобнаго типа называютъ обыкновенно т о ч к а м и в о з в р а т а . Названіе это станетъ

Чер. 27.

понятнымъ, если обратимъ вниманіе на чер. 28 , на которомъ изображенъ видъ кривой вблизи точки возврата. При непрерывномъ передвиженіи точки по кривой въ точкѣ возврата она мѣняетъ направленіе движенія на обратное. Замѣтимъ, впрочемъ, что тотъ видъ точекъ



Черт. 28.

возврата, который изображенъ на чертежѣ, есть только простѣйшій, и мы увидимъ, что въ случаѣ $\mathcal{F}_{12}^{2}-\mathcal{F}_{11}\mathcal{F}_{22}=0$ кривая можетъ представлять и болѣе сложныя особенности.

Предположимъ далѣе, что для координатъ точки M исчезаютъ не только $\mathcal{F}_1$ и $\mathcal{F}_2$, но и вторыя производныя $\mathcal{F}_{11}$, $\mathcal{F}_{12}$, $\mathcal{F}_{22}$; что касается до производныхъ 3-го порядка, то въ числѣ ихъ есть, по крайней мѣрѣ, одна отличная отъ нуля. Уравненіе (5) кривой въ этомъ случаѣ принимаетъ видъ

$$\frac{1}{1.2.3}\left(\mathcal{F}_{111}\xi^3+3\mathcal{F}_{112}\xi^2\eta+3\mathcal{F}_{122}\xi\eta^2+\mathcal{F}_{222}\eta^3\right)+$$

$$+\frac{1}{1.2.3.4}\left(\mathcal{F}_{1111}\xi^4+4\mathcal{F}_{1112}\xi^3\eta+6\mathcal{F}_{1122}\xi^2\eta^2+4\mathcal{F}_{1222}\xi\eta^3+\mathcal{F}_{2222}\eta^4\right)+\dots=0 \qquad (16)$$

а уравненіе (8), опредѣляющее значеніе t для точекъ пересѣченія данной кривой съ прямой, проходящей черезъ точку М, - видъ :

$$\frac{1}{1.2.3}\left(F_{111}\lambda^3+3F_{112}\lambda^2\mu+3F_{122}\lambda\mu^2+F_{222}\mu^3\right)t^3+$$
$$+\frac{1}{1.2.3.4}\left(F_{1111}\lambda^4+4F_{1112}\lambda^3\mu+6F_{1122}\lambda^2\mu^2+4F_{1222}\lambda\mu^3+F_{2222}\mu^4\right)t^4+\dots=0 \qquad (17)$$

Для произвольныхъ значеній λ, μ это уравненіе допускаетъ трехкратный корень t = о, слѣдовательно произвольная прямая, проходящая черезъ М имѣетъ въ этой точкѣ т р и слившихся общихъ точки съ данной кривой. Точка М подобнаго рода называется т р е х к р а т н о й точкой. Если λ, μ удовлетворяютъ уравненію

$$F_{111}\lambda^3+3F_{112}\lambda^2\mu+3F_{122}\lambda\mu^2+F_{222}\mu^3=0 \qquad (18),$$

то соотвѣтствующая прямая въ точкѣ М имѣетъ съ данной кривой ч е т ы р е слившихся общихъ точки, такъ какъ уравненіе (17) при этомъ допускаетъ четырехкратный корень t = о. Уравненіе (18) по дѣленіи на λ^3 обращается въ кубическое уравненіе относительно $\frac{\mu}{\lambda}$; оно даетъ три значенія для отношенія $\mu : \lambda$ и слѣдовательно въ точкѣ М получаемъ т р и прямыхъ, имѣющихъ съ данной кривой по четыре общихъ точки слившихся въ М. Эти прямыя называются касательными кривой въ ея трехкратной точкѣ. Возможны, очевидно, 4 различныхъ случая : или всѣ три касательныхъ дѣйствительны и различны, или двѣ мнимы, одна дѣйствительна, или двѣ изъ трехъ сливаются въ одну прямую, или на-

-.-.-.-.-.-.-.-

конецъ, всѣ три совпадаютъ. Уравненіе трехъ касательныхъ имѣетъ видъ

$$\mathcal{F}_{111}\xi^3+3\mathcal{F}_{112}\xi^2\eta+3\mathcal{F}_{122}\xi\eta^2+\mathcal{F}_{222}\eta^3=0;$$

Оно получается умноженіемъ уравненія (18) на t^3 и замѣной

$$\lambda t=\xi,\ \mu t=\eta.$$

Возьмемъ, наконецъ, общій случай, когда для координатъ точки M исчезаютъ всѣ производныя до производныхъ (K - 1) -го порядка включительно, между тѣмъ , какъ въ числѣ производныхъ порядка = K есть отличныя отъ нуля. Разложеніе въ рядъ Тэйлора функціи $\mathcal{F}$ по степенямъ ξ , η въ данномъ случаѣ начинается съ членовъ порядка K; поэтому всѣ прямыя, проходящія черезъ точку M имѣютъ въ ней по K слившихся общихъ точекъ съ данной кривой; точка M такого рода называется к р а т н о й точкой к р а т н о с т и K. Для опредѣленія направленія касательныхъ получаемъ уравненіе K - й степени относительно $\frac{\mu}{\lambda}$, и слѣдовательно имѣемъ всего K касательныхъ.

Если относить кривую къ осямъ ξ , η , т.е. если помѣстить въ кратной точкѣ начало координатъ, то, какъ видно изъ всего предшествующаго, K - кратная точка вполнѣ характеризуется тѣмъ обстоятельствомъ, что уравненіе кривой $\mathcal{F}$ = o, при разложеніи лѣвой части въ рядъ Тэйлора по степенямъ ξ , η начинается съ членовъ K - го порядка. Уравненіе касательныхъ въ этой точкѣ получимъ, приравнивая нулю группу членовъ наинизшаго (K - го) порядка.

Если намъ дана кривая уравненіемъ :

$$\mathcal{F}(x,y)=0$$

лѣвая часть котораго разложима въ рядъ Тэйлора въ области всѣхъ точекъ кривой, какъ это напримѣръ, имѣетъ мѣсто, если данная кривая - алгебраическая и $\mathcal{F}(x, y)$ есть многочленъ, то всѣ особыя точки найдемъ, рѣшая совмѣстно уравненія

$$\mathcal{F}(x,y)=0 \quad \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial x}=0 \qquad \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial y}=0 \qquad (19).$$

Такъ какъ, вообще говоря, эти уравненія несовмѣстимы, то можемъ сказать, что кривая, опредѣляемая произвольно заданнымъ уравненіемъ $\mathcal{F}(x, y) = 0$, вообще говоря, не имѣетъ особыхъ точекъ. Въ томъ случаѣ когда уравненія (19) совмѣстны, каждая система значеній x, y, удовлетворяющихъ этимъ уравненіямъ, даетъ намъ особую точку. Если для найденной системы значеній x, y, хотя одна изъ частныхъ производныхъ 2-го порядка $\frac{\partial^2 \mathcal{F}}{\partial x^2}, \frac{\partial^2 \mathcal{F}}{\partial x \partial y}, \frac{\partial^2 \mathcal{F}}{\partial y}$ отлична отъ нуля, то точка (x,y) - двойная; если всѣ производныя 2-го порядка исчезаютъ, но въ числѣ производныхъ 3-го порядка есть отличныя отъ нуля, то имѣемъ трехкратную точку и т.д.

П р и м ѣ р ъ . Разсмотримъ кривую

$$x^3+y^3-3axy=0$$

такъ - называемый Декартовъ листъ (см. § 9 , стр. 66 .Полагая

$$\mathcal{F}=x^3+y^3-3axy$$

имѣемъ

$$\mathcal{F}_1=3x^2-3ay, \quad \mathcal{F}_2=3y^2-3ax$$

$$\mathcal{F}_{11}=6x, \quad \mathcal{F}_{12}=-3a, \quad \mathcal{F}_{22}=6y$$

Уравненія $\mathcal{F}=0$, $\mathcal{F}_1=0$, $\mathcal{F}_2=0$ совмѣстны и даютъ x = 0,

$y = o$; слѣдовательно начало координатъ есть особая точка ; притомъ, такъ какъ $\mathcal{F}_{12}$ отлична отъ нуля для всѣхъ значенiй x, y, то Декартовъ листъ имѣетъ въ началѣ координатъ двойную точку (ср. чер. 23 на стр 66). Составляя выраженiе $\mathcal{F}_{12}^2 - \mathcal{F}_{11}\mathcal{F}_{22}$ для начала координатъ, имѣемъ :

$$9a^2 > 0$$

слѣдовательно, двойная точка есть въ частности узелъ. Касательныя въ этой точкѣ найдемъ, согласно замѣчанiю, сдѣланному выше, приравнивая нулю члены 2-го порядка въ данномъ уравненiи, такъ какъ начало координатъ совпадаетъ съ особой точкой. Такимъ образомъ, получаемъ (по сокращенiи на $-3a$)

$$xy = 0$$

т.е. касательныя совпадаютъ съ осями координатъ. Замѣтимъ, что согласно тому же замѣчанiю, изъ вида даннаго уравненiя непосредственно слѣдуетъ, что начало координатъ есть двойная точка, т. к. въ уравненiи отсутствуютъ члены нулевого и 1-го измѣренiя относительно x и y.

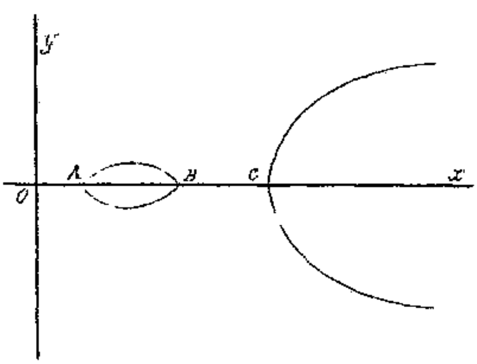
Чтобы уяснить себѣ видъ кривой въ области точки узловой, точки возврата и точки изолированной, разсмотримъ слѣдующiй примѣръ : пусть кривая опредѣляется уравненiемъ :

$$y^2 = (x-a)(x-b)(x-c) \qquad (20),$$

гдѣ $o < a < b < c$. Кривая эта - третьяго порядка и принадлежитъ къ числу такъ - называемыхъ расходящихся параболъ (по терминологiи Ньютона).

При $x < a$ правая частъ уравненiя (20) отрицательна и слѣдовательно y имѣетъ мнимыя значенiя. Для $x = a$ имѣемъ

$y = 0$; для значеній x, заключающихся между a и b, правая часть уравненія (20) положительна и слѣдовательно для каждаго значенія x получаемъ по два дѣйствительныхъ значенія y, отличающихся знакомъ. Для $x = b$ имѣемъ опять $y = 0$; для значеній x, заключающихся между b и c правая часть отрицательна и слѣдовательно y мнимо. Для $x = c$, $y = 0$ и наконецъ для $x > c$ получаемъ по два дѣйствительныхъ значенія y, отличающихся знакомъ. При возрастаніи x до безконечности, y также возрастаетъ до безконечности. Такимъ образомъ кривая пересѣкаетъ ось x въ трехъ точкахъ A.B.C. соотвѣтствующихъ значеніяхъ $x = a, b, c$. Если черезъ эти точки проведемъ прямыя параллельныя оси y, то дѣйствительныя точки кривой заключаются лишь между 1-й и 2-й прямыми, а также вправо отъ третьей; притомъ въ этой послѣд-
области
ней кривая простирается въ безконечность; а въ 1-й области всѣ точки лежатъ на конечномъ разстояніи и образуютъ замкнутый овалъ. Кривая слѣдовательно, состоитъ изъ овала и безконечной вѣтви; наконецъ, слѣдуетъ замѣтить, что кривая наша симметрична относительно оси x (смотри черт. 29).



Черт. 29.

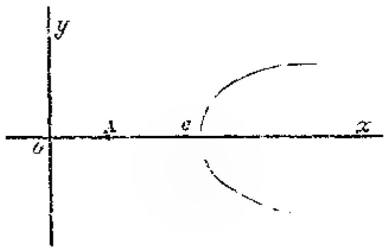
Предположимъ во-первыхъ, что точка B постепенно приближается къ A и въ предѣлѣ
постепенно
совпадаетъ съ ней; очевидно, овалъ при этомъ сокращается и обращается въ предѣлѣ въ одну точку. Мы получаемъ, такимъ обра-

зомъ кривую съ изолированной точкой (см. чер. 30); уравненіе ея

$$y^2 = (x-a)^2\,(x-c)$$

получаемъ изъ уравненія (20), полагая въ немъ b = a.

Не трудно непосредственно убѣдиться, что А есть изолированная точка : въ самомъ дѣлѣ, для х = а имѣемъ у = О; между тѣмъ для х < а или для х > а,



Черт. 30.

но меньшаго с, у принимаетъ мнимыя значенія. Составляя для функціи

$$\mathcal{F} = y^2 - (x-a)^2\cdot(x-c)$$

частныя производныя, имѣемъ

$$\mathcal{F}_1 = -2(x-a)\cdot(x-c) - (x-a)^2; \quad \mathcal{F}_2 = 2y;$$
$$\mathcal{F}_{11} = -2(x-c) - 4(x-a); \qquad \mathcal{F}_{12} = 0, \quad \mathcal{F}_{22} = 2.$$

Для х = а , у = О имѣемъ :

$$\mathcal{F}_1 = 0 \quad , \quad \mathcal{F}_2 = 0$$

$$\mathcal{F}_{11} = -2(a-c), \quad \mathcal{F}_{12} = 0, \quad \mathcal{F}_{22} = 2; \quad \mathcal{F}_{12}^2 - \mathcal{F}_{11}\cdot\mathcal{F}_{22} = +4(a-c) < 0;$$

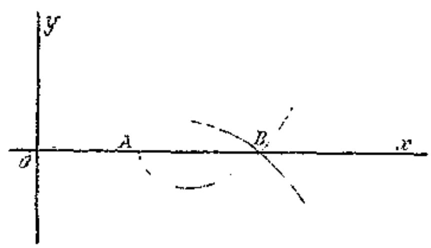
Слѣдовательно всѣ условія изолированной точки выполнены.

Предположимъ, во-вторыхъ, что точка С постепенно приближается къ В, сливаясь съ нею въ предѣлѣ. При этомъ безконечная вѣтвь и овалъ съ одного конца постепенно вытягиваются, и въ предѣлѣ мы получаемъ, очевидно, кривую съ узловой точкой въ В (см. черт. 31).

Уравненіе этой кривой

$$y^2=(x-a)(x-b)^2$$

получаемъ изъ уравненія (20), полагая $c = b$.Непосредственное изслѣдованіе легко подтверждаетъ, что B есть узловая точка, такъ



Черт. 31.

какъ для значеній x, заключающихся между a и b , а также для $x > b$, y имѣетъ по два значенія, а для $x = b$ получаемъ лишь $y = 0$, и слѣдовательно въ точкѣ B кривая сама себя пересѣкаетъ. Составляя для функціи

$$F = y^2 - (x-a)(x-b)^2$$

производныя

$$F_1 = -(x-b)^2-2(x-b)(x-a), \quad F_2 = 2y$$

$$F_{11} = -4(x-b)-2(x-a), \quad F_{12}=0, \quad F_{22}=2.$$

и вставляя координаты $x = b$, $y = 0$ точки B, имѣемъ :

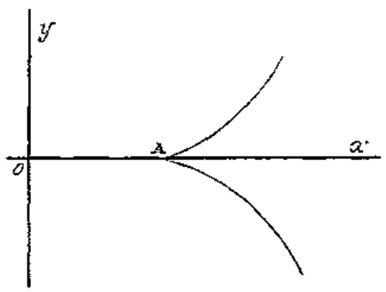
$$F_1 = 0 \quad , \qquad F_2 = 0$$

$$F_{12}^2 - F_{11}F_{22} = 4(b-a) > 0;$$

слѣдовательно для точки B выполняются всѣ условія узловой точки.

Предположимъ,наконецъ, что всѣ три точки A,B, C сливаются въ одну. Мы можемъ къ этому случаю перейти по произволу отъ одного изъ двухъ предшествующихъ, или приближая (въ первомъ случаѣ) изолированную точку къ безконечной вѣтви, или со -

кращая (во второмъ случаѣ) петлю узловой точки. Въ предѣлѣ получимъ кривую съ точкой возврата въ A (см.черт. 32).



Черт. 32.

Уравненіе кривой имѣетъ видъ :

$$y^2 = (x - a)^3$$

и получается изъ уравненія (20) при a = b = c. Для x $<$ a, y мнимо; для x = a , y = 0; для x $>$ a y имѣетъ по два дѣйствительныхъ значенія, отличающихся знакомъ. Составляя для функціи $\mathcal{F} = y^2 - (x - a)^3$ производныя

$$\mathcal{F}_1 = -3(x-a)^2 \ , \ \mathcal{F}_2 = 2y$$

$$\mathcal{F}_{11} = -6(x-a) \ , \ \mathcal{F}_{12} = 0, \ \mathcal{F}_{22} = 2, \ \mathcal{F}_{21} \ 2$$

и вставляя координаты x = a , y = 0 точки A, имѣемъ :

$$\mathcal{F}_1 = 0, \ \mathcal{F}_2 = 0 , \ \mathcal{F}_{11} = 0, \ \mathcal{F}_{12} = 0, \ \mathcal{F}_{22} = 2$$

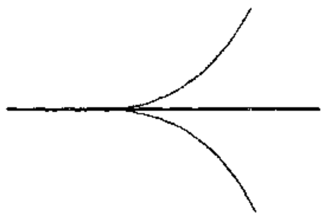
$$\mathcal{F}_{12}^2 - \mathcal{F}_{11} \mathcal{F}_{22} = 0 ,$$

слѣдовательно для точки A выполнены всѣ условія точки возврата.

Возвращаясь къ общей теоріи, разсмотримъ подробнѣе, какой видъ можетъ имѣть кривая въ области двукратной точки, для которой

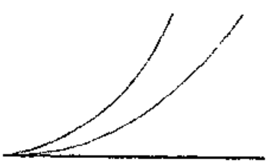
$$\mathcal{F}_{12}^2 - \mathcal{F}_{11} \mathcal{F}_{22} = 0$$

Мы видѣли, что въ такой точкѣ двѣ касательныя кривой сливаются въ одну, слѣдовательно, можемъ ожидать, что кривая въ смежности съ подобной точкой состоитъ изъ двухъ вѣтвей, имѣющихъ общую касательную въ разсматриваемой точкѣ. Такой именно случай мы имѣли выше для точекъ возврата; но при этомъ обѣ вѣтви кривой лежали всегда по двѣ разныхъ стороны касательной въ точкѣ возврата (Чер. 33) Это и есть нормальный случай; точку



Черт. 33.

возврата подобнаго вида можно разсматривать какъ предѣльный случай узловой или изолирован-
ее нас
ной точки; точкой возврата 1-го рода. Возможны, однако, и такія точки возврата, въ которыхъ двѣ вѣтви кривой лежатъ по одну сторону общей касательной (см. черт. 34). Ихъ называютъ точками возврата 2-го рода

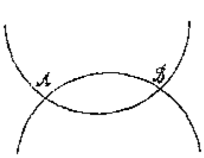


Черт. 34.

Наконецъ, возможенъ еще третій типъ двойной точки, для которой

$$\mathcal{F}_{12}^2 - \mathcal{F}_{11} \cdot \mathcal{F}_{22} = 0$$

Предположимъ именно, что имѣемъ кривую, которая сама себя пересѣкаетъ въ двухъ точкахъ A и B (черт. 35) и пусть двѣ вѣтви кривой, деформируясь, раздвигаются такъ что точки A и B, которыя суть узловыя точки кривой, постепенно сближаются между собою. Въ предѣлѣ, при совпаденіи этихъ точекъ, мы получимъ, кривую, двѣ вѣтви которой въ общей точкѣ A имѣютъ общую касательную (см. чер. 36).

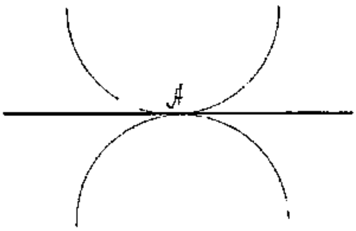


Черт. 35.

Точка A есть двукратная точка, для которой

$$\mathcal{F}_{12}^2 - \mathcal{F}_{11}\, \mathcal{F}_{22} = 0,$$

она называется точкой с а м о п р и к о с н о в е н і я.



Черт. 36

Замѣтимъ, что точка возврата 2-го рода и точка самоприкосновенія - представляютъ изъ себя гораздо болѣе сложныя особенности кривой, чѣмъ точка возврата 1-го рода. Для точки самоприкосновенія это очевидно хотя бы изъ того, что она можетъ получиться, какъ указано выше, отъ слiянія двухъ узловыхъ точекъ. Такъ какъ для всѣхъ трехъ типовъ точекъ, разсмотрѣнныхъ нами, выполняются одни и тѣ же условія

$$F_1=0\,,\quad F_2=0,\quad F_{12}^2-F_{11}\cdot F_{22}=0 \qquad (21),$$

то иногда всѣ эти точки безразлично называютъ точками возврата но слѣдуетъ замѣтить, что это названіе едва-ли удобно примѣнять къ точкамъ самоприкосновенія. Точки возврата 1-го и 2-го рода называютъ также точками з а о с т р е н і я.

Для точки возврата 2-го рода и для точки самоприкосновенія кромѣ общихъ условій (21) выполняются еще нѣкоторыя добавочныя условія; такимъ образомъ общій нормальный случай двойной точки, для которой имѣетъ мѣсто равенство :

$$F_{12}^2-F_{11}\cdot F_{22}=0\,,$$

представляетъ изъ себя только точка возврата 1-го рода.

Разсмотримъ три примѣра, иллюстрирующіе три различныхъ типа точекъ, которые мы только что указали.

П р и м ѣ р ъ 1. Разсмотримъ кривую

$y^2 \quad x^3$

- такъ называемую полукубическую параболу.

Мы собственно уже встрѣчали эту кривую выше, при чемъ имѣли уравненіе ея въ видѣ

$$y^2=(x-a)^3$$

Въ данномъ случаѣ a = 0, но легко замѣтить, что измѣняя a мы только передвигаемъ кривую, сохраняя ея форму неизмѣнной.

Такъ какъ въ уравненіи $y^2=x^3$ или

$$y^2-x^3=0$$

низшіе члены суть члены 2-го порядка, то начало координатъ есть есть двойная точка ; уравненіе касательныхъ въ двойной точкѣ получимъ, приравнивая нулю члены 2-го порядка; такимъ образомъ имѣемъ :

$$y^2=0$$

откуда заключаемъ, что двѣ касательныхъ сливаются въ одну прямую, а именно въ ось x. Изслѣдуя уравненіе кривой

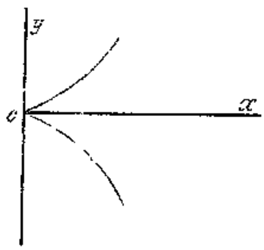
$$y^2=x^3,$$

замѣчаемъ во-первыхъ, что y принимаетъ дѣйствительныя значенія только для положительныхъ значеній x, слѣдовательно кривая всѣми своими точками лежитъ по одну сторону оси y, а именно въ области положительныхъ абсциссъ; во-вторыхъ замѣчаемъ, что для каждаго положительнаго значенія x, y имѣетъ два значенія, отличающихся только знакомъ $y = \pm x^{3/2}$; слѣдовательно кривая состоитъ изъ двухъ симметричныхъ вѣтвей, изъ которыхъ одна лежитъ выше, другая ниже оси x ; въ началѣ координатъ обѣ вѣтви касаются оси x. Сопоставляя всѣ эти замѣчанія, легко убѣждаемся, что начало координатъ есть т о ч к а в о з в р а т а

1-го рода (см. черт. 37).

Примѣръ 2. Разсмотримъ кривую, опредѣляемую уравненіемъ

$$(ay - x^2)^2 = \frac{x^5}{m},$$



Черт. 37.

гдѣ a и m предполагаемъ положительными числами. Раскрывая скобки и перенося члены, можемъ представить уравненіе кривой въ видѣ:

$$a^2y^2 - 2ayx^2 + x^4 - \frac{x^5}{m} = 0.$$

Такъ какъ низшіе члены - 2-го порядка, то начало координатъ есть двойная точка; уравненіе касательныхъ въ этой точкѣ получаемъ, приравнивая нулю совокупность членовъ 2-го порядка; итакъ имѣемъ:

$$y^2 = 0,$$

т.е. касательныя сливаются въ одну прямую - ось x. Разрѣшая уравненіе кривой относительно y, имѣемъ:

$$y = \frac{1}{a}x^2 \pm \frac{x^{\frac{5}{2}}}{am^{\frac{1}{2}}} \qquad (22).$$

Легко видѣть, что y дѣйствительно только для положительныхъ значеній x (при отрицательномъ x; $x^{\frac{5}{2}}$ = мнимо); такимъ образомъ, кривая всѣми точками лежитъ вправо отъ оси y. Для x=0, имѣемъ y = 0; для положительныхъ, но достаточно малыхъ значеній x, оба значенія y, которыя даетъ формула (22), одновременно оказываются положительными, такъ какъ второй членъ правой части - высшаго порядка малости сравнительно съ первымъ, который существенно положителенъ. Такимъ образомъ, вблизи начачала координатъ двѣ вѣтви кривой, соотвѣтствующія двумъ различнымъ знакамъ ($\pm$) формулы (22), лежатъ по одну сторону оси у. Сопоставляя всѣ сдѣланныя нами замѣчанія, легко заключаемъ, что начало координатъ есть т о ч к а в о з в р а т а 2 - г о р о д а (см. черт. 38).

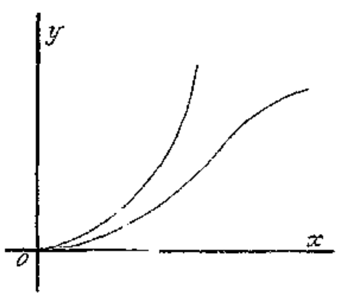
П р и м ѣ р ъ 3. Пусть имѣемъ кривую, опредѣляемую уравненіемъ

$$a^2x^2=(x^2+y^2)\,y^2 \qquad (23)$$

или, въ раскрытомъ видѣ :

$$a^2x^2-x^2y^2-y^4=0$$

Начало координатъ есть, очевидно, двойная точка, такъ какъ низшіе члены - 2-го порядка; касательныя въ этой точкѣ опредѣляются уравненіемъ $a^2x^2=0$ или



Черт. 38.

$$x^2=0,$$

слѣдовательно сливаются въ одну прямую - ось у. Рѣшая уравненіе кривой относительно х, имѣемъ :

$$x^2=\frac{y^4}{a^2\ y^2}$$

Дѣйствительныя значенія для х получаемъ только при томъ условіи, чтобы у по абсолютной величинѣ не превосходило а, такъ какъ въ противномъ случаѣ имѣли бы $x^2<0$. Итакъ, для дѣйствительныхъ точекъ кривой имѣемъ

$$a\leq y\leq a,$$

т.е. кривая всѣми своими точками лежитъ внутри области,ограниченной прямыми

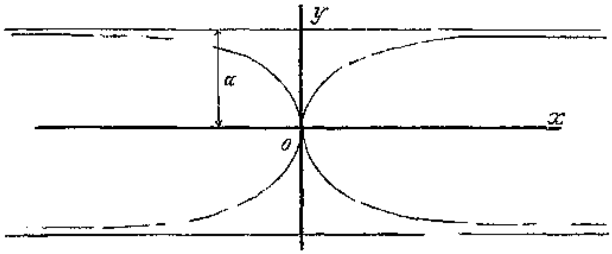
$$y = a \quad \text{и} \quad y = -a,$$

параллельными оси x. Для $y = \pm a$ получаемъ $x = \infty$, откуда легко слѣдуетъ, что прямыя $y = a$ и $y = -a$ суть асимптоты кривой. Такъ какъ въ уравненіе (23) входятъ лишь четныя степени x и y , то каждой системѣ значеній $x = \alpha$, $y = \beta$, удовлетворяющихъ этому уравненію, соотвѣтствуетъ еще три системы

$$x = \alpha, \; y = -\beta \; ; \; x = -\alpha, \; y = \beta \; ; \; x = -\alpha, \; y = -\beta,$$

которыя точно также удовлетворяютъ уравненію (23). Другими словами, кривая симметрична какъ относительно оси x, такъ и относительно оси y и,слѣдовательно,лежитъ во всѣхъ четырехъ квадрантахъ. Для построенія кривой достаточно ограничиться положительными значеніями x и y ; тогда мы получимъ ту часть кривой, которая лежитъ въ 1-мъ квадрантѣ; остальныя части симметричны 1-ой. Если будемъ ограничиваться, какъ сказано, положительными значеніями x и y, то увидимъ, что каждому значенію y соотвѣтствуетъ одно значеніе x, возрастающее отъ нуля до безконечности при возрастаніи y отъ нуля до a. Сопоставляя всѣ сдѣланныя нами замѣчанія, легко убѣждаемся, что кривая, опредѣляемая уравненіемъ (23), имѣетъ въ началѣ координатъ т о ч к у с а м о п р и к о с н о в е н і я ; общій видъ ея (см. черт. 39) напоминаетъ до нѣкоторой степени греческую букву"Каппа", почему кривую эту и называютъ кривой"Каппа".

Не трудно было бы для кривой"Каппа",равно какъ для кривыхъ, разсмотрѣнныхъ въ двухъ предшествующихъ примѣрахъ, непосредственно провѣрить, что въ началѣ координатъ имѣютъ мѣсто равенства



Черт. 39.

$$\mathcal{F}_1=0,\quad \mathcal{F}_2=0,$$
$$\mathcal{F}_{12}^2-\mathcal{F}_{11}\mathcal{F}_{22}=0,$$

которыми характеризуется двойная точка съ совпадающими касательными.

Изслѣдованіе особыхъ точекъ можно бы вести, предполагая, что кривая опредѣляется двумя уравненіями вида

$$x=\varphi(t),\quad y=\psi(t)$$

Ограничимся замѣчаніемъ, что точка (x_0 , y_0), соотвѣтствующая значенію t_0 параметра t , есть обыкновенная точка, если всѣ точки кривой достаточно- близкія къ (x_0 , y_0) получаются изъ одной пары разложеній въ ряды Тэйлора

$$x=x_0+a_1(t-t_0)+a_2(t-t_0)^2+\cdots$$
$$y=y_0+b_1(t-t_0)+b_2(t-t_0)^2+\cdots,$$

при чемъ коэффиціенты a_1 , b_1 , которые равны значеніямъ производныхъ $\frac{dx}{dt}$, $\frac{dy}{dt}$ для $t=t_0$, одновременно не могутъ исчезать.

До сихъ поръ мы разсматривали такія особыя точки, при изслѣдованіи которыхъ возможно пользоваться рядомъ Тэйлора, опредѣляя кривую уравненіемъ вида $\mathcal{F}(x,y)=0$. Намъ остается разсмотрѣть такія особыя точки, въ области которыхъ не существуетъ разложенія въ рядъ Тэйлора для функцій, входящихъ въ уравненіе кривой, въ какой бы формѣ мы ни предполагали эти уравненія. Такой случай имѣетъ мѣсто, какъ было упомянуто въ началѣ параграфа, если абсцисса x_0 особой точки является, такъ называемымъ существенно-особымъ значеніемъ для функціи $f(x)$, входящей въ уравненіе кривой

$$y = f(x)$$

Мы ограничимся двумя частными примѣрами, на которыхъ познакомимся съ двумя классами особыхъ точекъ этого типа.

Примѣръ 1. Пусть имѣемъ кривую, опредѣляемую уравненіемъ

$$y = e^{-\frac{1}{x}}$$

Для функціи $e^{-\frac{1}{x}}$ значеніе перемѣннаго $x = 0$ есть существенно особое; функція эта принимаетъ для $x = 0$ различныя значенія въ зависимости отъ того, по какимъ значеніямъ x приближается къ нулю. Въ самомъ дѣлѣ, предполагая во-первыхъ, что x приближается къ нулю по положительнымъ значеніямъ, имѣемъ

$$\lim_{x=+0} y = e^{-\infty} = 0;$$

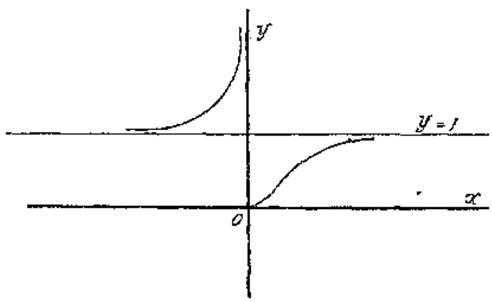
Предполагая, во-вторыхъ, что x стремится къ нулю по отрицательнымъ значеніямъ, имѣемъ

$$\lim_{x=-0} y = e^{+\infty} = \infty$$

Такимъ образомъ, кривая состоитъ изъ двухъ отдѣльныхъ частей; та изъ этихъ частей, которая лежитъ въ области положительныхъ абсциссъ, проходитъ черезъ начало координатъ; наоборотъ, часть кривой, лежащая влѣво отъ оси y, не проходитъ черезъ начало и имѣетъ, очевидно, ось y асимптотой. Въ результатѣ оказывается, что кривая прерывается для x = 0, и начало координатъ есть т о ч к а п е р е р ы в а, въ которой прерывается, останавливается одна вѣтвь кривой (вѣтвь, лежащая вправо отъ оси y). Предполагая, что x возрастаетъ безгранично по абсолютной величинѣ, имѣемъ :

$$\lim_{x=\infty} y = e^0 = 1;$$

слѣдовательно, кривая наша имѣетъ еще асимптоту y = 1. Сопоставляя всѣ эти замѣчанія, легко составляемъ себѣ представленіе о формѣ кривой (см. черт. 40).



Черт. 40.

П р и м ѣ р ъ 2. Разсмотримъ кривую, опредѣляемую уравненіемъ :

$$y = \frac{x}{1+e^{\frac{1}{x}}}.$$

Значеніе x = 0 есть существенно - особое значеніе перемѣннаго для функціи, входящей въ уравненіе кривой. При подстановкѣ x = 0 имѣемъ y = 0, независимо отъ того, стремится x къ нулю по положительнымъ или отрицательнымъ значеніямъ, такъ какъ числитель выраженія y для x = 0 обращается въ обоихъ случаяхъ въ нуль, а знаменатель - въ первомъ случаѣ въ безконечность, а во второмъ -въ 1. Такимъ образомъ, кривая проходитъ черезъ начало координатъ, и притомъ по обѣ стороны начала имѣются точки кривой, образущія одну непрерывную линію; точка $x = 0$, $y = 0$, слѣдовательно, не есть точка перерыва, какъ въ предшествующемъ примѣрѣ. Постараемся теперь опредѣлить касательную въ этой точкѣ. Такъ какъ точка $x = 0$, $y = 0$ особая, то исходимъ изъ первоначальнаго опредѣленія касательной, какъ предѣльнаго положенія сѣкущей, и составляемъ уравненіе сѣкущей, проходящей черезъ начало координатъ и черезъ какую-либо точку (x, y) нашей кривой. Уравненіе это имѣетъ видъ

$$\frac{\mathcal{Y}}{\mathcal{X}} = \frac{y}{x} \quad \text{или} \quad \mathcal{Y} = \frac{y}{x}\cdot\mathcal{X} \qquad (24),$$

гдѣ $\mathcal{X}$, $\mathcal{Y}$ - текущія координаты. Уравненіе касательной получимъ, переходя къ предѣлу для $x = 0$. Все дѣло такимъ образомъ сводится къ изслѣдованію выраженія $\frac{y}{x}$, входящаго въ правую часть уравненія (24) коэффиціентомъ при $\mathcal{X}$, для значенія $x = 0$. Вставляя выраженіе y изъ уравненія кривой, имѣемъ

$$\frac{y}{x} = \frac{1}{1+e^{\frac{1}{x}}},$$

и видимъ, что $\frac{y}{x}$ имѣетъ различные предѣлы для $x = 0$, въ зависимости отъ того, приближается ли x къ нулю по положительнымъ или по отрицательнымъ значеніямъ. Въ первомъ случаѣ имѣемъ :

$$\lim_{x=+0}\frac{y}{x} = \frac{1}{1+e^{\infty}} = \frac{1}{\infty} = 0,$$

а во второмъ

$$\lim_{x=-0}\frac{y}{x} = \frac{1}{1+e^{-\infty}} = \frac{1}{1} = 1$$

Итакъ, въ началѣ координатъ получаемъ двѣ различныхъ касательныхъ, опредѣляемыхъ соотвѣтственно уравненіями

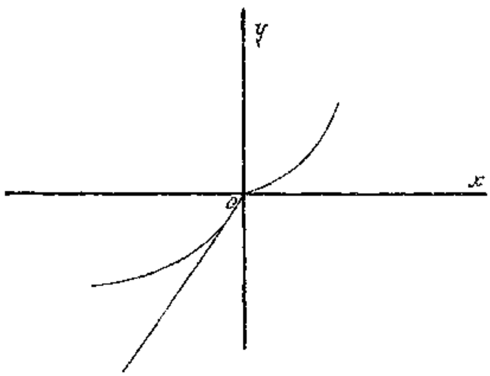
$$\mathcal{Y} = 0 \quad \text{и} \quad \mathcal{Y} = \mathcal{X}.$$

Первая изъ нихъ должна быть разсматриваема какъ касательная къ той части кривой, которая находится въ области положительныхъ абсциссъ, вторая - какъ касательная къ части кривой, лежащей въ области отрицательныхъ абсциссъ. Если мы будемъ передвигаться по кривой, переходя (черезъ начало координатъ) съ лѣвой стороны оси y на правую, то касательная будетъ сначала непрерывно мѣнять свое направленіе, приближаясь къ равнодѣлящей координатнаго угла, опредѣляемой уравненіемъ

$$y = x$$

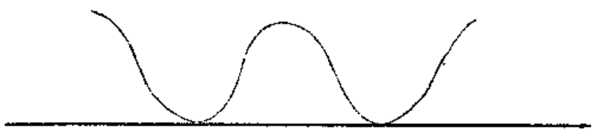
при переходѣ черезъ начало касательная сразу мѣняетъ свое направленіе, обращаясь изъ упомянутой равнодѣлящей въ ось x (соотвѣтственно уравненію $y = 0$); затѣмъ она снова продолжаетъ непрерывно мѣнять свое направленіе. Такимъ образомъ въ началѣ координатъ имѣемъ нарушеніе непрерывности въ направленіи касательной, и кривая тамъ какъ бы переламывается. Точки подобнаго рода называютъ у г л о в ы м и точками или точками перелома. Возвращаясь къ данному примѣру, замѣчаемъ, что для положительныхъ значеній x, y положительно, для отрицательныхъ - отрицательно; слѣдовательно кривая расположена въ 1-мъ и 3-мъ квадрантахъ. Наконецъ, при безграничномъ возрастаніи x , y очевидно, возрастаетъ безгранично по абсолютной величинѣ, и такимъ образомъ кривая простирается въ безконечность. Сопоставляя всѣ эти замѣчанія, легко составляемъ себѣ представленіе о формѣ кривой (см. черт. 41).

Изслѣдуя особыя точки, мы разсматривали кривую какъ геометрическое мѣсто точекъ ; но возможно также разсматривать ее, какъ геометрическое мѣсто ея касательныхъ. При этомъ мы принимаемъ за простѣйшую геометрическую форму, за элементъ, уже не точку, а прямую линію. Извѣстно, какъ подобный взглядъ на дѣло приводитъ къ такъ называемому закону двойственности, въ силу котораго цѣлый рядъ геометрическихъ соотношеній допускаетъ преобразованіе въ новый рядъ соотношеній, путемъ замѣны точекъ прямыми линіями и обратно. Если мы опредѣляемъ кривую какъ геометрическое мѣсто точекъ, то касательная является предѣльнымъ положеніемъ сѣкущей, то есть прямой, проходящей черезъ двѣ точки кривой; соотвѣтственно этому, если опредѣляемъ кривую какъ геометрическое мѣсто прямыхъ - касательныхъ, къ понятію о точкѣ кривой можемъ притти, разсматривая точку пересѣченія двухъ касательныхъ и переходя къ предѣлу въ предположеніи, что эти касательныя сливаются.



Черт. 41.

Становясь на эту новую точку зрѣнія, мы можемъ говорить объ *особыхъ касательныхъ*, подобно тому, какъ выше говорили объ особыхъ точкахъ. Не трудно, напримѣръ, усмотрѣть, что будетъ въ силу закона двойственности соотвѣтствовать двойной (узловой) точкѣ. Въ обыкновенной точкѣ кривой имѣется одна касательная; подобно этому обыкновенная касательная касается кривой въ одной точкѣ (она кромѣ того можеть п е р е с ѣ к а т ь кривую въ цѣломъ рядѣ другихъ точекъ). Въ узловой точкѣ имѣемъ двѣ различныхъ касательныхъ ; преобразуя узловую точку по закону двойственности, получаемъ касательную, которая касается кривой въ д в у х ъ различныхъ точкахъ (см. черт. 42): такія касательныя называются д в о й н ы м и касательными



Черт. 42.

Равнымъ образомъ, касательныя въ точкахъ перегиба кривой по закону двойственности соотвѣтствуютъ точкамъ возврата ; ихъ называютъ обыкновенно с т а ц і о н а р н ы м и касательными. Интересно отмѣтить ,при этомъ, что точка прикосновенія стаціонарной касательной, т.е. точка перегиба есть, вообще говоря, обыкновенная точка кривой, между тѣмъ, какъ касательная въ этой точкѣ есть особая касательная.

11. О СОПРИКОСНОВЕНІИ ПЛОСКИХЪ КРИВЫХЪ.

Положимъ, что намъ даны двѣ кривыя, опредѣляемыя уравненіями

$$y = f(x) \quad \text{и} \quad y = \varphi(x),$$

и допустимъ, что эти кривыя имѣютъ общую точку (x , y).

Предполагая существованіе конечныхъ, непрерывныхъ производныхъ функцій $f(x)$ и $\varphi(x)$ до какого - нибудь порядка m, мы можемъ для точекъ достаточно-близкихъ къ точкѣ $(x_0\ y_0)$ эти функціи разложить въ конечные ряды Тэйлора. Давая абсциссѣ x одно и то же значеніе, достаточно- близкое къ x_0, мы получаемъ два различныхъ значенія y

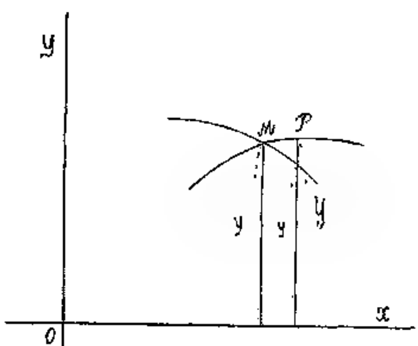
$$y = f(x) \qquad \text{и} \qquad Y = \varphi(x)$$

которыя соотвѣтствуютъ двумъ точкамъ P и Q нашихъ кривыхъ, лежащихъ на одной и той же ординатѣ (см. черт. 43).

Разлагая $f(x)$ и $\varphi(x)$ по степенямъ $x - x_0$, имѣемъ

$$y = y_0 + \frac{x-x_0}{1} f'(x_0) + \frac{(x-x_0)^2}{1\,2} f''(x_0) + \cdots + \frac{(x-x_0)^m}{m!} f^{(m)}\big(x_0 + \theta(x-x_0)\big) \qquad (1)$$

$$Y = y_0 + \frac{x-x_0}{1} \varphi'(x_0) + \frac{(x-x_0)^2}{1.2} \varphi''(x_0) + \qquad + \frac{(x-x_0)^m}{m!} \varphi^{(m)}\big(x_0 + \theta'(x-x_0)\big) \quad (2),$$



Черт. 43.

при чемъ первые члены разложеній совпадаютъ, такъ какъ по условію кривыя имѣютъ общую точку $M(x_0, y_0)$ и слѣдовательно

$$f(x_0) = \varphi(x_0) = y \qquad (3).$$

Вычитая изъ равенства (2) равенство (1), получаемъ

$$Y - y = \frac{x-x_0}{1}\big[\varphi'(x_0) - f'(x_0)\big] + \frac{(x-x_0)^2}{1\,2}\big[\varphi''(x_0) - f''(x_0)\big] + \cdots +$$
$$+ \frac{(x-x_0)^m}{m!}\Big[\varphi^{(m)}\big(x_0 + \theta(x-x_0)\big) - f^{(m)}\big(x_0 + \theta'(x-x_0)\big)\Big] \qquad (4)$$

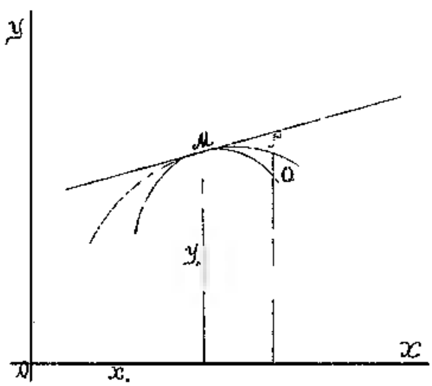
Разность $Y - y$ равняется, очевидно, отрѣзку QP, т.е. разстоянію точекъ двухъ кривыхъ, лежащихъ на одной и той же ординатѣ. Положимъ, что данныя кривыя въ точкѣ М имѣютъ общую касательную; въ такомъ случаѣ имѣемъ :

$$f'(x_0)=\varphi'(x_0) \qquad (5),$$

такъ какъ и та и другая производная равняется тангенсу угла, образуемаго касательной въ точкѣ М съ осью абсциссъ. Разложеніе (4) въ этомъ случаѣ принимаетъ, вообще говоря, видъ .

$$Y-y=\frac{(x-x_0)^2}{1.2}\left[\varphi''(x_0)-f''(x_0)\right]+\frac{(x-x_0)^3}{1.2.3}\left[\varphi'''(x_0)-f'''(x_0)\right]+\cdots \qquad (6),$$

т.е. начинается съ члена 2-го порядка. Данныя кривыя (см. черт. 44) въ точкѣ М имѣютъ при этомъ, какъ принято говорить, соприкосновеніе 1-го порядка. Для того, чтобы подобный случай имѣлъ мѣсто, должно выполняться условія (3) и (5).



Черт. 44.

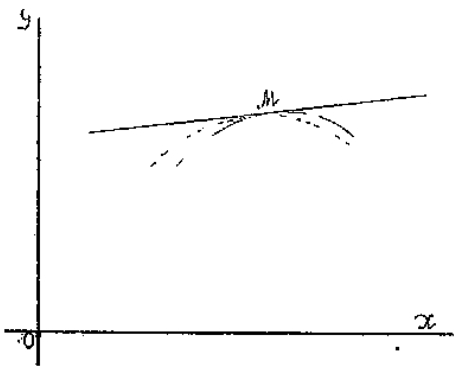
Допустимъ теперь, что въ разложеніи (4) исчезаютъ всѣ члены до членовъ n - го порядка включительно, ($n < m$), такъ что разность $Y-y$ принимаетъ видъ :

$$Y-y=\frac{(x-x_0)^{n+1}}{1.2.3..(n+1)}\left[\varphi^{n+1}(x_0)-f^{n+1}(x_0)\right]+\cdots \qquad (6)$$

Въ этомъ случаѣ говорятъ, что данныя кривыя въ точкѣ М находятся въ соприкосновеніи n-го порядка. Для того, чтобы подобный случай имѣлъ мѣсто, необходимо и достаточно выполненіе условій :

$$
\begin{aligned}
f(x_0) &= \varphi(x_0) \\
f'(x_0) &= \varphi'(x_0) \\
f''(x_0) &= \varphi''(x_0) \\
&\cdots\cdots\cdots \\
f^{(n)}(x_0) &= \varphi^{(n)}(x_0)
\end{aligned}
\qquad (7)
$$

изъ которыхъ первое есть не что иное, какъ условіе (3), а остальныя получаются приравненіемъ нулю коэффиціентовъ первыхъ n членовъ въ разложеніи (4). Согласно съ нашимъ опредѣленіемъ, кривыя находятся въ точкѣ M въ соприкосновеніи нулевого порядка, если ихъ касательныя въ этой точкѣ различны; въ этомъ случаѣ обыкновенно говорятъ, что кривыя пересѣкаются въ точкѣ M (см. черт. 48). Предполагая x достаточно близкимъ къ x_0, т.е. разсматривая точки P, Q достаточно - близкія къ M, мы можемъ утверждать, что знакъ разности $Y - y$ совпадаетъ со знакомъ перваго члена въ ея разложеніи по степенямъ ($x - x_0$). Предполагая, что кривыя находятся въ точкѣ M въ соприкосновеніи n - го порядка и, что слѣдовательно $Y - y$ опредѣляется равенствомъ (6), мы легко заключаемъ на основаніи предшествующаго замѣчанія, что съ измѣненіемъ знака $x - x_0$, знакъ $Y - y$ мѣняется или не мѣняется въ зависимости отъ того, нечетное или четное будетъ число $n + 1$ (показатель $X - X_0$ въ 1-мъ членѣ разложенія) или, что безразлично, въ зависимости отъ того, будетъ - ли n числомъ четнымъ или нечетнымъ. Отсюда заключаемъ, что если кривыя въ точкѣ M находятся въ соприкосновеніи нечетнаго порядка, то въ смежности съ этой точкой одна кривая лежитъ по одну сторону другой, одна кривая "объемлетъ" другую, какъ напримѣръ, это имѣетъ мѣсто, на черт. 44-мъ, иллюстрирующемъ случай соприкосновенія 1-го порядка. Въ самомъ дѣлѣ, для значеній X достаточно - близкихъ къ X_0 $\mathcal{Y}$ - у сохраняетъ одинъ и тотъ же знакъ, и слѣдовательно точки второй кривой всѣ лежатъ или выше или ниже точекъ первой кривой, независимо отъ того даемъ - ли мы X значенія меньшія или большія X_0. Наоборотъ, въ случаѣ соприкосновенія четнаго порядка разность $\mathcal{Y}$ - у мѣняетъ знакъ съ измѣненіемъ знака $X - X_0$ и, слѣдовательно, вторая кривая переходитъ въ точкѣ M съ одной стороны первой кривой на другую, другими словами, двѣ кривыя въ точкѣ M пересѣкаются, хотя въ то же время имѣютъ въ ней общую касательную (при $n > 0$), какъ это явствуетъ изъ 2-го изъ условій (7). Подобный случай имѣетъ мѣсто (см. черт. 45), напримѣръ, если кривыя находятся въ точкѣ M въ соприкосновенія 2-го порядка, т.е. если выполняются условія



$$\begin{aligned} f(x_0) &= \varphi(x_0) \\ f'(x_0) &= \varphi'(x_0) \\ f''(x_0) &= \varphi''(x_0) \end{aligned} \qquad (8)$$

Черт. 45.

Возвращаясь къ равенству (6) и предполагая $X - X_0$ безконечно - малымъ, видимъ, что разность $\mathcal{Y}$ - у въ случаѣ соприкосновенія n - го порядка есть безконечно-малое ($n+1$)- го порядка (относительно $X - X_0$). Такимъ образомъ, въ этомъ случаѣ разстояніе P Q между точками двухъ данныхъ кривыхъ P и Q , безконечно-близкими къ точкѣ M , есть безгранично-малое ($n+1$)-го порядка относительно разности абсциссъ $X - X_0$. При этомъ слѣдуетъ замѣтить, что разстояніе измѣряется отрѣзкомъ ординаты, т.е. по направленію, параллельному оси Y. Возникаетъ вопросъ, не измѣнится - ли порядокъ малости разстоянія, если мы измѣнимъ систему координатъ; другими словами, не зависитъ - ли порядокъ соприкосновенія кривыхъ отъ выбора осей . Предположимъ, что отъ системы координатъ $x,\ y$ мы перешли къ системѣ $x',\ y'$, связанной съ данной формулами преобразованія

$$x' = \alpha x + \beta y + a, \quad y' = \gamma x + \delta y + b \tag{9}$$

Дифференцируя эти два равенства, получимъ .

$$\frac{dy'}{dx'} = \frac{\gamma dx + \delta dy}{\alpha dx + \beta dy} = \frac{\gamma + \delta \frac{dy}{dx}}{\alpha + \beta \frac{dy}{dx}}; \tag{10}$$

дифференцируя $\frac{dy'}{dx'}$, по x', имѣемъ :

$$\frac{d^2y'}{dx'^2} = \frac{d}{dx}\left\{\frac{\gamma + \delta \frac{dy}{dx}}{\alpha + \beta \frac{dy}{dx}}\right\} \cdot \frac{dx}{dx'} = \frac{(\alpha\delta - \beta\gamma)\frac{d^2y}{dx^2}}{\left(\alpha + \beta \frac{dy}{dx}\right)^3} \tag{11}$$

и аналогично выразимъ производныя высшихъ порядковъ y' по x' черезъ производныя y по x , при чемъ въ формулы войдутъ постоянные коэффиціенты α , β , γ , δ формулъ преобразованія (9).

Отсюда мы заключаемъ, что если для двухъ кривыхъ совпадали производныя y по x до n-го порядка, то будутъ совпадать и производныя y' по x' до того же порядка, и слѣдовательно, порядокъ соприкосновенія не зависитъ отъ выбора осей.

Предположимъ, что одна изъ данныхъ кривыхъ опредѣляется уравненіемъ вида :

$$\mathcal{F}(x, y) = 0, \qquad (12),$$

а другая уравненіемъ, разрѣшеннымъ относительно y

$$y = f(x) \qquad (13).$$

Условія соприкосновенія n - го порядка въ точкѣ съ координатами x_0, $y_0 = f(x_0)$, можемъ получить, исходя изъ слѣдующихъ соображеній: уравненіе (12) опредѣляетъ y, какъ неявную функцію x ; производныя этой функціи получимъ дифференцируя уравненіе (12) послѣдовательно одинъ, два,... n разъ по x ; если затѣмъ въ полученныя равенства вставимъ вмѣсто x значеніе его x_0, то значенія y и его производныхъ до n - го порядка должны совпасть съ таковыми же значеніями, полученными изъ уравненія (12), и слѣдовательно, приходимъ къ условіямъ соприкосновенія :

$$\begin{gathered}
\mathcal{F}(x_0, y_0) = 0 \\
\left(\frac{\partial \mathcal{F}}{\partial x}\right)_0 + \left(\frac{\partial \mathcal{F}}{\partial y}\right)_0 \left(\frac{dy}{dx}\right)_0 = 0 \qquad (14) \\
\left(\frac{\partial^2 \mathcal{F}}{\partial x^2}\right)_0 + 2\left(\frac{\partial^2 \mathcal{F}}{\partial x \partial y}\right)_0 \left(\frac{dy}{dx}\right)_0 + \left(\frac{\partial^2 \mathcal{F}}{\partial y^2}\right)_0 \left(\frac{dy}{dx}\right)_0^2 + \left(\frac{\partial \mathcal{F}}{\partial y}\right)_0 \left(\frac{d^2 y}{dx^2}\right)_0 = 0 \\
\text{- -} \\
\left(\frac{\partial^n \mathcal{F}}{\partial x^n}\right)_0 + \text{- - - - - - - - - - - - - -} + \left(\frac{\partial \mathcal{F}}{\partial y}\right)_0 \left(\frac{d^n y}{dx^n}\right)_0 = 0
\end{gathered}$$

гдѣ значками 0 указаны результаты подстановокъ координатъ

x_0, y_0 и гдѣ $\left(\frac{d^m y}{dx^m}\right)_0 = f^{(m)}(x_0)$, т.е. вычисляются изъ ур-iя (13).

Пусть, наконецъ, одна изъ данныхъ кривыхъ по прежнему опредѣляется уравненiемъ (12), а другая - двумя уравненiями

$$x = \varphi(t), \quad y = \psi(t). \qquad (15).$$

гдѣ t - произвольный параметръ; выведемъ условiя соприкосновенiя n - го порядка въ точкѣ съ координатами $x_0 = \varphi(t_0)$ $y_0 = \psi(t_0)$. Вставляя въ уравненiе (12) вмѣсто у $\varphi(t)$, мы изъ полученнаго ур-iя опредѣлимъ у въ функцiи t, такъ что вторая кривая будетъ опредѣляться двумя уравненiями

$$x = \varphi(t), \quad y = \chi(t) \qquad (16)$$

Для значенiй t безконечно - близкихъ къ t_0 разность $\chi(t) - \psi(t)$ должна быть $n+1$ - го порядка малости относительно $x - x_0$; но

$$x - x_0 = \varphi'(t_0)(t-t_0) + \frac{\varphi''(t_0)}{1\cdot 2}(t-t_0)^2 + \dots$$

вообще - перваго x) порядка относительно $t - t_0$ и слѣдовательно мы можемъ опредѣлять порядокъ разности $\chi(t) - \psi(t)$ относительно $t - t_0$. Условiя соприкосновенiя n - го порядка получимъ, потребовавъ, чтобы значенiя функцiи $\chi(t)$ и ея производныхъ до n - го порядка (включительно) для $t = t_0$ совпадали съ таковыми же значенiями функцiй

- - - - - - -

x) Если $\varphi'(t_0) = 0$, то $x - x_0$ уже не 1-го, а высшаго порядка относительно $t - t_0$. Въ этомъ случаѣ можемъ придти къ условiямъ соприкосновенiя (17) замѣнивъ x черезъ y и обратно. Разсужденiя наши становятся непримѣнимыми только, если одновременно $\varphi'(t_0) = 0$, $\psi'(t_0) = 0$, но но тогда точка x_0, y_0 - особая точка кривой (15).

$\psi(t)$ и ея производныхъ. Но $y = \chi(t)$ опредѣляется уравненiмъ (12) по замѣнѣ x черезъ $\varphi(t)$, и производныя $\chi(t)$ получимъ, дифференцируя ур-iе (12) по t въ предположенiи, что $x = \varphi(t)$. Подставляя вмѣсто t его значенiе t_0 и полагая по предъидущему $\chi^{(m)}(t_0) = \psi^{(m)}(t_0)$ для $m = 0, 1, 2, \ldots n$, приходимъ къ условiямъ соприкосновенiя n - го порядка :

$$\mathcal{F}(x_0, y_0) = 0$$

$$\left(\frac{\partial \mathcal{F}}{\partial x}\right)_0 x_0' + \left(\frac{\partial \mathcal{F}}{\partial y}\right)_0 y_0' = 0$$

$$\left(\frac{\partial^2 \mathcal{F}}{\partial x^2}\right)_0 x_0'^2 + 2\left(\frac{\partial^2 \mathcal{F}}{\partial x \partial y}\right)_0 x_0' y_0' + \left(\frac{\partial^2 \mathcal{F}}{\partial y^2}\right)_0 y_0'^2 + \left(\frac{\partial \mathcal{F}}{\partial x}\right)_0 x_0'' + \left(\frac{\partial \mathcal{F}}{\partial y}\right)_0 y_0'' = 0$$

$$\text{-------------------------------------} \qquad (17)$$

$$\left(\frac{\partial^n \mathcal{F}}{\partial x^n}\right)_0 x_0'^n + \text{------------------} + \left(\frac{\partial \mathcal{F}}{\partial y}\right)_0 y_0^{(n)} = 0$$

Въ равенствахъ (17) значки 0 при частныхъ производныхъ функцiи $\mathcal{F}$ означаютъ подстановку координатъ x_0, y_0, а черезъ $x_0, x_0', x_0'', \ldots x_0^{(n)}$, $y_0, y_0', y_0'', \ldots y_0^{(n)}$ обозначены значенiя x, y и ихъ производныхъ по t, получаемыя изъ уравненiй (15) для $t = t_0$

12. О СОПРИКАСАЮЩИХСЯ (ОСКУЛИЛИРУЮЩИХЪ ЛИНIЯХЪ).

Предположимъ, что имѣется семейство линiй, опредѣляемыхъ уравненiемъ

$$\mathcal{F}(x, y, C_1, C_2 \ldots C_n) = 0 \qquad (1)$$

гдѣ $C_1, C_2 \ldots C_n$ – произвольные параметры. Давая различныя значенія этимъ параметрамъ, получаемъ различныя кривыя семейства. Будемъ искать линію, принадлежащую къ семейству и имѣющую въ данной точкѣ (x_0 , y_0) соприкосновеніе возможно высшаго порядка съ данной кривой, опредѣляемой уравненіями

$$x=\varphi(t),\ y=\psi(t) \qquad (2)$$

Примѣняя результаты предшествующаго параграфа (см. условія (17) пишемъ условія соприкосновенія ($n - 1$) - го порядка:

$$\begin{gathered} \mathcal{F}(x_0, y_0, C_1, C_2, \ldots\ldots C_n) = 0 \\ \left(\frac{\partial\mathcal{F}}{\partial x}\right)_0 x_0' + \left(\frac{\partial\mathcal{F}}{\partial y}\right)_0 y_0' = 0 \qquad (3) \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \left(\frac{\partial^{n-1}\mathcal{F}}{\partial x^{n-1}}\right)_0 x_0'^{\,n-1} + \cdots\cdots\cdots\cdots + \left(\frac{\partial\mathcal{F}}{\partial y}\right)_0 y_0^{n-1} = 0 \end{gathered}$$

При этомъ черезъ x_0 , x_0' , x_0'' , y_0 , y_0' , y_0'', ... обозначаемъ значенія функцій

$$x=\varphi(t),\quad y=\psi(t)$$

и ихъ производныхъ для значенія параметра $t=t_0$, соотвѣтствующаго разсматриваемой точкѣ (x_0 , y_0). Рѣшая n уравненій (3) относительно C_1 , C_2 , ... C_n получаемъ опредѣленныя значенія для этихъ параметровъ и, слѣдовательно, опредѣленную линію семейства (1), которая въ данной точкѣ имѣетъ соприкосновеніе ($n - 1$)-го порядка съ данной кривой. Очевидно, притомъ, что линія, найденная нами находится съ данной кривой въ соприкосновеніи порядка наивысшаго изъ возможныхъ. Въ самомъ дѣлѣ, если бы мы потребовали, чтобы соприкосновеніе было n - го или высшаго порядка, то получили бы $n + 1$ или болѣе условій типа (3), которыя, вообще говоря, оказались бы несовмѣстными, если бы мы ихъ стали разсматривать, какъ уравненія для опредѣленія n параметровъ C_1, C_2, ... C_n. Такимъ образомъ, въ данной точкѣ (x_0, y_0) данной кривой существуетъ, вообще говоря, одна или нѣсколько вполнѣ опредѣленныхъ линій семейства (1), которыя имѣютъ съ данной кривой соприкосновеніе (n - 1)-го порядка. Возможны, однако, и такія исключительныя точки на данной кривой, въ которыхъ линіи семейства (1) имѣютъ съ данной кривой соприкосновеніе n - го (или даже высшаго) порядка. Въ самомъ дѣлѣ, присоединимъ къ равенствамъ (3) еще одно

$$\left(\frac{\partial^n \mathcal{F}}{\partial x^n}\right)_0 x_0'^n + n\left(\frac{\partial^n \mathcal{F}}{\partial x^{n-1}\partial y}\right)_0 x_0'^{n-1} y_0' + \cdots + \left(\frac{\partial \mathcal{F}}{\partial y}\right)_0 y_0^{(n)} = 0 \qquad (4)$$

которое дополняетъ ихъ до системы условій соприкосновенія n - го порядка. Совокупность уравненій (3) и (4) вообще несовмѣстна относительно C_1, C_2 ... C_n для даннаго значенія $t = t_0$; но если мы въ этихъ уравненіяхъ будемъ разсматривать t_0 какъ неизвѣстное на ряду съ C_1, C_2, ... C_n, то можемъ изъ системы $n + 1$ уравненій опредѣлить всѣ $n + 1$ неизвѣстныхъ и, такимъ образомъ, получаемъ точки кривой, въ которыхъ возможно соприкосновеніе n - го порядка съ линіей семейства (1); точки эти соотвѣтствуютъ найденнымъ значеніямъ t_0. Понятно, что эти точки - исключительныя; въ п р о и з в о л ь н о й точкѣ кривой невозможно найти линіи семейства (1), имѣющей съ данной кривой соприкосновеніе выше ($n - 1$)-го порядка.

Будемъ называть линіи семейства (1), имѣющія съ данной кривой въ данной точкѣ соприкосновеніе возможно - высшаго порядка с о п р и к а с а ю щ и м и с я кривыми для данной кривой. Соприкасающаяся кривая въ точкѣ (x_0 , y_0) опредѣляется уравненіемъ (1), въ которомъ C_1 , C_2 .... C_n слѣдуетъ замѣнить ихъ значеніями, получаемыми изъ системы (2). Соприкасающаяся кривая въ произвольной точкѣ кривой имѣетъ съ ней соприкосновеніе порядка на единицу меньшаго числа параметровъ въ уравненіи (1). Только въ исключительныхъ точкахъ, соотвѣтствующихъ тѣмъ значеніямъ параметра t_0 , для которыхъ совмѣстна система уравненій (2) и (4), соприкасающаяся кривая имѣетъ съ данной соприкосновеніе высшаго порядка.

Разсмотримъ для примѣра соприкасающіяся п р я м ы я для данной кривой. Уравненіе (1) въ этомъ случаѣ принимаетъ видъ

$$Ax + By + C = 0, \qquad (5),$$

гдѣ A, B, C - произвольныя постоянныя. Число этихъ постоянныхъ равно тремъ, но число существенно-независимыхъ параметровъ, входящихъ въ уравненіе (5), равно, очевидно, только двумъ, такъ какъ мы всегда можемъ раздѣлить уравненіе на одно изъ трехъ постоянныхъ, напримѣръ, на A, и тогда въ уравненіе будутъ входить лишь два отношенія

$$C_1 = \frac{B}{A}, \quad C_2 = \frac{C}{A}.$$

Согласно общимъ результатамъ, въ произвольной точкѣ (x_0 , y_0) данной кривой (1) существуетъ опредѣленная прямая семейства (5), находящаяся въ соприкосновенiи 1-го порядка съ данной кривой. Условiя соприкосновенiя (3) принимаютъ видъ:

$$\begin{aligned} Ax_0 + By_0 + C &= 0 \\ Ax_0' + By_0' &= 0 \end{aligned} \qquad (6)$$

Изъ двухъ уравненiй (6) мы можемъ найти отношенiя двухъ изъ коэффицiентовъ A, B, C къ третьему и вставить въ уравненiе (5). Вмѣсто этого непосредственно исключаемъ изъ трехъ линейныхъ однородныхъ уравненiй (5) и (6) три количества A, B, C и получаемъ уравненiе соприкасающейся прямой въ видѣ:

$$\begin{vmatrix} x & y & 1 \\ x_0 & y_0 & 1 \\ x_0' & y_0' & 0 \end{vmatrix} = 0 \qquad (7)$$

Вычитая изъ элементовъ 1-ой строки опредѣлителя элементы 2-ой строки и разлагая затѣмъ опредѣлитель по элементамъ 3-го столбца, получаемъ:

$$\begin{vmatrix} x - x_0, & y - y_0, & 0 \\ x_0, & y_0, & 1 \\ x_0', & y_0', & 0 \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} x-x_0, & y-y_0 \\ x_0', & y_0' \end{vmatrix} = 0;$$

наконецъ, раскрывая опредѣлитель 2-го порядка, имѣемъ:

$$y_0' (x-x_0) - x_0' (y - y_0) = 0$$

$$\frac{x-x_0}{x_0'} = \frac{y-y_0}{y_0'} \qquad (8)$$

Уравненiе (8) есть не что иное какъ уравненiе касательной въ точкѣ (x_0, y_0); такимъ образомъ соприкасающаяся прямая есть касательная. Постараемся опредѣлить, въ какихъ точкахъ кривой касательная имѣетъ соприкосновенiе 2-го порядка. Если (x_0, y_0) есть такая точка, то должны имѣть мѣсто условiя

$$\begin{aligned} Ax_0 + By_0 + C &= 0 \\ Ax_0' + By_0' &= 0 \\ Ax_0'' + By_0'' &= 0 \end{aligned} \tag{9}$$

Исключая изъ этихъ равенствъ A, B, C, получаемъ искомое условiе. Такъ какъ C не входитъ въ два послѣднихъ уравненiя, то достаточно исключить изъ нихъ A и B, и тогда получаемъ:

$$\begin{vmatrix} x_0' & y_0' \\ x_0'' & y_0'' \end{vmatrix} = 0$$

или, раскрывая опредѣлитель:

$$x_0' y_0'' - x_0'' y_0' = 0 \tag{10}$$

Условiе (10) имѣетъ мѣсто для точекъ перегиба; такимъ образомъ только въ этихъ точкахъ касательная находится съ данной кривой въ соприкосновенiи 2-го (или высшаго) порядка.

13. СОПРИКАСАЮЩIЙСЯ КРУГЪ.

Уравненiе произвольной окружности

$$(x - \alpha)^2 + (y - \beta)^2 = R^2 \tag{1}$$

заключаетъ 3 произвольныхъ параметра, именно координаты α, β центра и радiусъ R. Поэтому, согласно общей теорiи, изложенной въ предшествующемъ параграфѣ, для произвольной точки (x_0, y_0) данной кривой

$$x = \varphi(t), \quad y = \psi(t) \tag{2}$$

можно найти окружность (1), находящуюся въ соприкосновенiи

2-го порядка съ данной кривой, и эта окружность называется соприкасающейся окружностью. Для того чтобы найти координаты ея центра и радіусъ, пишемъ условія соприкосновенія 2-го порядка кривыхъ (1) и (2).

Условія эти получаемъ, какъ извѣстно, замѣняя въ уравненіи (1) и въ двухъ уравненіяхъ, получаемыхъ дифференцированіемъ уравненія (1) по t, координаты x, y и ихъ производныя черезъ x_0, y_0, x_0', y_0', x_0'', y_0'', т.е. черезъ значенія x и y, опредѣляемыхъ уравненіями (2), и ихъ производныхъ для $t=t_0$ (если t_0 есть значеніе параметра, соотвѣтствующее разсматриваемой точкѣ).

Такимъ образомъ имѣемъ:

$$(x_0-\alpha)^2+(y_0-\beta)^2=R^2 \qquad (3)$$

$$(x_0-\alpha)x_0'+(y_0-\beta)y_0'=0 \qquad (4)$$

$$(x_0-\alpha)x_0''+(y_0-\beta)y_0''+x_0'^2+y_0'^2=0 \qquad (5)$$

Изъ уравненія (4) заключаемъ, что разности $\alpha-x_0$ и $\beta-y_0$ пропорціональны соотвѣтственно $-y_0'$ и x_0'; слѣдовательно имѣемъ право положить

$$\alpha-x_0=-\lambda y_0', \quad \beta-y_0=\lambda x_0' \qquad (6)$$

Внося эти выраженія въ уравненіе (5), получаемъ:

$$-\lambda(x_0'y_0''-x_0''y_0')+x_0'^2+y_0'^2=0,$$

откуда

$$\lambda=\frac{x_0'^2+y_0'^2}{x_0'y_0''-x_0''y_0'}$$

Вставляя это выраженіе въ формулы (6), имѣемъ

$$\alpha=x_0-\frac{x_0'^2+y_0'^2}{x_0'y_0''-x_0''y_0'}\cdot y_0' \ ; \quad \beta=y_0+\frac{x_0'^2+y_0'^2}{x_0'y_0''-x_0''y_0'}\cdot x_0' \qquad (7)$$

Наконецъ, вставляя выраженія (7) въ равенство (3), находимъ

$$R^2 = \frac{(x_0'^2 + y_0'^2)^3}{(x_0'y_0'' - x_0''y_0')^2} \qquad (8)$$

Формулы (7) опредѣляютъ координаты центра соприкасающагося круга, равенство (8) опредѣляетъ квадратъ его радіуса. Для вычисленія радіуса R мы должны извлечь квадратный корень изъ правой части равенства (8); если желаемъ найти абсолютную величину радіуса, то въ формулѣ

$$R = \pm \frac{(x_0'^2 + y_0'^2)^{\frac{3}{2}}}{x_0'y_0'' - x_0''y_0'} \qquad (9)$$

мы должны взять тотъ изъ двухъ знаковъ $\pm$, для котораго правая часть оказывается положительной. Соприкасающійся кругъ можетъ быть построенъ для произвольной точки (x, y) данной кривой (1). Выраженія для координатъ его центра и для его радіуса получимъ, замѣняя въ равенствахъ (7), (9) x_0, y_0, x_0', y_0', x_0'', y_0'' соотвѣтственно черезъ x, y, x', y', x'', y'', при чемъ акцентами, какъ всегда, обозначаемъ дифференцированіе по t и подъ X, Y разумѣемъ выраженія ихъ, опредѣляемыя уравненіями (2) данной кривой. Такимъ образомъ получаемъ:

$$\alpha = x - y'\frac{x'^2 + y'^2}{x'y'' - x''y'}; \quad \beta = y + x'\frac{x'^2 + y'^2}{x'y'' - x''y'} \qquad (10)$$

$$R = \pm\frac{(x'^2 + y'^2)^{3/2}}{x'y'' - x''y'} \qquad (11)$$

Соприкасающійся кругъ называютъ также к р у г о м ъ к р и в и з н ы (причина такого названія выяснится въ слѣдующемъ параграфѣ) и соотвѣтственно этому - центръ его - ц е н т р о м ъ к р и в и з н ы данной кривой. Такимъ образомъ ра венства (10) опредѣляютъ координаты центра кривизны для произвольной точки (X, У) данной кривой. Такъ какъ соприкасающійся кругъ и данная кривая въ точкѣ (X, У) имѣютъ общую касательную, а слѣдовательно и общую нормаль, то центръ кривизны лежитъ на нормали данной кривой, проведенной въ соотвѣтствующей точкѣ (X, У). Выраженія (10), полученныя нами для координатъ α, β центра кривизны, суть функціи произвольнаго параметра t; при измѣненіи t измѣняются α и β; центръ кривизны перемѣщается съ перемѣщеніемъ точки (X, У) по данной кривой и описываетъ нѣкоторую линію, которая называется э в о л ю т о й данной кривой. Равенства (10), которыя, какъ мы видѣли, опредѣляютъ α и β въ функціи параметра и слѣдовательно имѣютъ видъ

$$\alpha = \varphi_1(t), \quad \beta = \psi_1(t),$$

представляютъ изъ себя уравненія эволюты. Исключая изъ нихъ t, получаемъ уравненіе эволюты

$$\Phi(\alpha, \beta) = 0$$

въ Декартовыхъ координатахъ.

Предполагая въ частности параметръ t = X, т.е. опредѣляя данную кривую уравненіемъ

$$y = f(x) \qquad (12)$$

въ Декартовыхъ координатахъ, имѣемъ

$$X' = 1, \quad X'' = 0, \quad y' = \frac{dy}{dx}, \quad y'' = \frac{d^2y}{dx^2},$$

и общія формулы (10) и (11) принимаютъ видъ

$$\alpha = x - \frac{dy}{dx} \cdot \frac{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2}{\frac{d^2y}{dx^2}}; \quad \beta = y + \frac{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2}{\frac{d^2y}{dx^2}} \qquad (13)$$

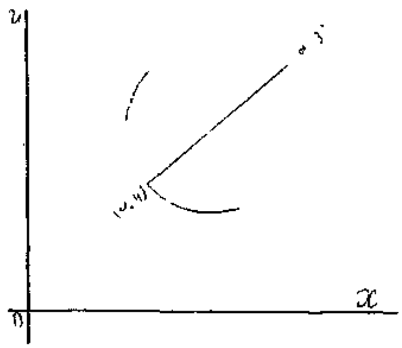
$$\mathcal{R} = \pm \frac{\left[1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right]^{\frac{3}{2}}}{\frac{d^2y}{dx^2}} \qquad (14)$$

Мы бы могли получить ихъ и непосредственно, предполагая уравненіе кривой въ видѣ (12), если бы написали условія соприкосновенія 2-го порядка данной кривой (12) и окружности (1) въ той частной формѣ (§ 11, рав.14), которая была дана въ § 11 для двухъ кривыхъ, изъ которыхъ одна опредѣляется уравненіемъ вида (12). При этомъ намъ пришлось бы продифференцировать уравненіе (1) два раза по X, считая У неявной функціей X, и мы бы получили:

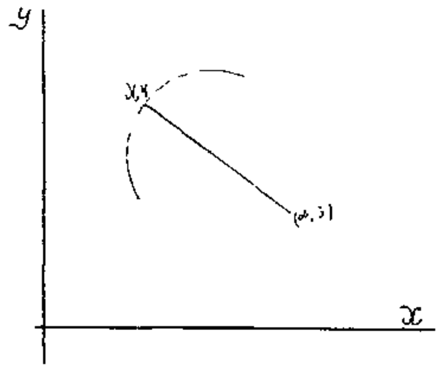
$$\begin{aligned} &(x-\alpha)^2+(y-\beta)^2=\mathcal{R}^2 \\ &(x-\alpha)+(y-\beta)\frac{dy}{dx}=0 \qquad\qquad (15) \\ &1+\left(\frac{d^2y}{dx}\right)^2+(y-\beta)\frac{d^2y}{dx^2}=0 \end{aligned}$$

Рѣшая эти уравненія относительно α, β, R, приходимъ къ формуламъ (13) и (14).

На основаніи второго изъ равенствъ (13), знакъ разности β-У совпадаетъ со знакомъ второй производной $\frac{d^2y}{dx^2}$. Если для разсматриваемой точки кривой ордината У положительна, то кривая обращена къ оси X выпуклостью или вогнутостью, смотря по тому, имѣетъ ли вторая производная въ разсматриваемой точкѣ положительное или отрицательное значеніе (см. § 5); при этомъ, согласно предыдущему, разность β-У или положительна или отрицательна т.е. центръ соприкасающагося круга лежитъ выше или ниже соотвѣтствующей точки кривой, а слѣдовательно въ обоихъ случаяхъ онъ лежитъ въ сторону вогнутости кривой. Допустимъ теперь, что ордината У отрицательна; въ такомъ случаѣ при положительномъ значенiи $\frac{d^2y}{dx^2}$ кривая обращена къ оси X вогнутостью и наоборотъ, но зато при положительномъ значенiи разности $\beta - y$ центръ соприкасающагося круга удаленъ отъ точки кривой въ сторону оси X и наоборотъ. Такимъ образомъ, центръ соприкасающагося круга (центръ кривизны) всегда лежитъ на нормали кривой в ъ с т о р о н у е я в о г н у т о с т и (ср. черт.46 и черт.47).



Черт.46.



Черт.47.

Въ заключенiе замѣтимъ, что соприкасающiйся кругъ можно опредѣлить какъ предѣльное положенiе круга, проходящаго черезъ три безконечно-близкiя точки кривой. Въ самомъ дѣлѣ, разсмотримъ три точки данной кривой, соотвѣтствующiя тремъ значенiямъ параметра: t_0, $t_0 + \Delta t$ и $t_0 + \Delta' t$., и проведемъ черезъ нихъ окружность, опредѣляемую уравненiемъ (1). Параметры α, β и R, входящiе въ уравненiе окружности, опредѣлятся изъ трехъ уравненiй, которыя получимъ, замѣняя въ уравненiи (1) текущiя координаты соотвѣтственно координатами трехъ вышеупомянутыхъ точекъ кривой. Перенося членъ R^2 въ лѣвую часть и вставляя вмѣсто X, У функцiи $\varphi(t)$ и $\psi(t)$ изъ уравненiй (2) данной кривой, получаемъ нѣкоторую функцію параметра t, которую для сокращенія обозначимъ черезъ F(t), полагая такимъ образомъ

$$\mathcal{F}(t)=(x-\alpha)^2+(y-\beta)^2-\mathcal{R}^2=[\varphi(t)-\alpha]^2+[\psi(t)-\beta]^2-\mathcal{R}^2 \qquad (16)$$

Три уравненія, о которыхъ шла рѣчь выше, при сохраненіи всѣхъ введенныхъ обозначеній принимаютъ видъ:

$$\mathcal{F}(t_0)=0,\quad \mathcal{F}(t_0+\Delta t)=0,\quad \mathcal{F}(t_0+\Delta' t)=0 \qquad (17)$$

Предположимъ, что функціи $\varphi(t)$, $\psi(t)$ допускаютъ непрерывныя производныя по крайней мѣрѣ до 3-го порядка; тогда то же самое имѣетъ мѣсто для функціи F(t), и мы можемъ разложить лѣвыя части двухъ послѣднихъ уравненій (17) въ конечные ряды Тэйлора. Вычитая изъ этихъ уравненій первое и дѣля результаты на Δt и $\Delta' t$, получаемъ:

$$\mathcal{F}'(t_0)+\mathcal{F}''(t_0)\frac{\Delta t}{1.2}+\mathcal{F}'''\big(t_0+\theta(t-t_0)\big)\frac{\Delta t^2}{1.2.3}=0$$

$$\mathcal{F}'(t_0)+\mathcal{F}''(t_0)\frac{\Delta' t}{1.2}+\mathcal{F}'''\big(t_0+\theta'(t-t_0)\big)\frac{\Delta' t^2}{1.2.3}=0 \qquad (18)$$

Предполагаемъ, что отношеніе k приращенія $\Delta' t$ къ приращенію Δt остается конечнымъ и отличнымъ отъ единицы. Полагая $\Delta' t = k\Delta t$ во второмъ изъ уравненій (18), вычитая его изъ перваго и дѣля результатъ на Δt, получаемъ:

$$\frac{1-k}{1.2}\mathcal{F}''(t_0)+\frac{1}{1.2.3}\Delta t\Big[\mathcal{F}'''\big(t_0+\theta(t-t_0)\big)-k^2\mathcal{F}'''\big(t_0+\theta'(t-t_0)\big)\Big]=0 \qquad (19)$$

Систему ур-ій (17) мы можемъ замѣнить равносильной ей системой, состоящей изъ перваго изъ ур-ій (17), перваго изъ ур-ій (18) и ур-ія (19). Пусть теперь вторая и третья изъ данныхъ точекъ на нашей кривой неограниченно приближаются къ первой и перейдемъ къ предѣлу, полагая $\Delta t = 0$; тогда три ур-ія, полученныя нами, обращаются въ слѣдующія:

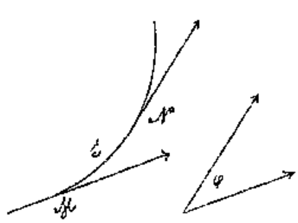
$$\mathcal{F}(t_0)=0,\quad \mathcal{F}'(t_0)=0,\quad \mathcal{F}''(t_0)=0 \qquad (20)$$

Выполняя дифференцированія надъ функціей F(t), опредѣляемой равенствомъ (18), легко убѣждаемся, что уравненія (20) совпадаютъ съ уравненіями (3), (4), (5), и такимъ образомъ окружность наша совпадаетъ съ соприкасающейся окружностью.

14. КРИВИЗНА ПЛОСКОЙ КРИВОЙ.

Разсмотримъ произвольную прямую. Если бы мы стали въ любой точкѣ ея опредѣлять касательную, то убѣдились бы, что касательная всегда совпадаетъ съ данной прямой; такимъ образомъ, при передвиженіи точки по прямой, касательная не мѣняетъ своего направленія, такъ какъ вообще остается неизмѣнной.

Дѣло обстоитъ совершенно иначе для кривой линіи: при перемѣщеніи точки по кривой, напримѣръ, изъ положенія M въ положеніе M', касательная мѣняетъ свое направленіе (см.черт. 48-ой), и если мы будемъ изъ произвольной точки O (черт.48) проводить прямыя, параллельныя касательнымъ въ направленіи, совпадающемъ съ положительнымъ направленіемъ каждой касательной, то при



Черт.48.

перемѣщеніи точки по кривой изъ M въ M' прямая, проходящая черезъ точку O, повертывается на нѣкоторый уголъ φ, который есть уголъ двухъ касательныхъ, проведенныхъ въ точкахъ M и M' чѣмъ болѣе дуга кривой MM' отступаетъ отъ прямой линіи, тѣмъ болѣе величина угла φ, который такимъ образомъ можетъ служить мѣрой кривизны всей дуги. Отношеніе

$$\frac{\varphi}{s}$$

этого угла къ длинѣ дуги называютъ с р е д н е й к р и в и з н о й дуги.

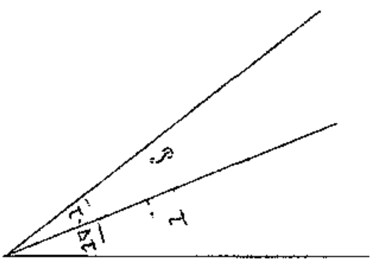
Будемъ точку M' неограниченно приближать къ M; замѣтимъ при этомъ, что безконечно-малый уголъ φ двухъ касательныхъ въ безконечно-близкихъ точкахъ кривой называютъ иногда у г л о м ъ с м е ж н о с т и. Отношеніе $\frac{\varphi}{s}$, т.е. средняя кривизна дуги MM', измѣняется при приближеніи точки M' къ M; если функціи, входящія въ уравненія кривой, допускаютъ производныя первыхъ двухъ порядковъ, то упомянутое отношеніе стремится къ опредѣленному предѣлу, который называютъ к р и в и з н о й д а н н о й к р и в о й в ъ т о ч к ѣ M. Такимъ образомъ, кривизна кривой въ данной точкѣ есть предѣлъ, къ которому стремится средняя кривизна дуги, имѣющей начало въ данной точкѣ, въ томъ предположеніи, что конецъ дуги неограниченно приближается къ началу. Называя кривизну въ данной точкѣ черезъ K, имѣемъ:

$$K = \lim_{s=0} \frac{\varphi}{s} \qquad (1)$$

Назовемъ черезъ τ уголъ, который образуетъ положительное направленіе касательной въ точкѣ M съ положительнымъ направленіемъ оси X; уголъ этотъ измѣняется съ перемѣщеніемъ точки по кривой, и если кривая опредѣляется двумя уранненіями

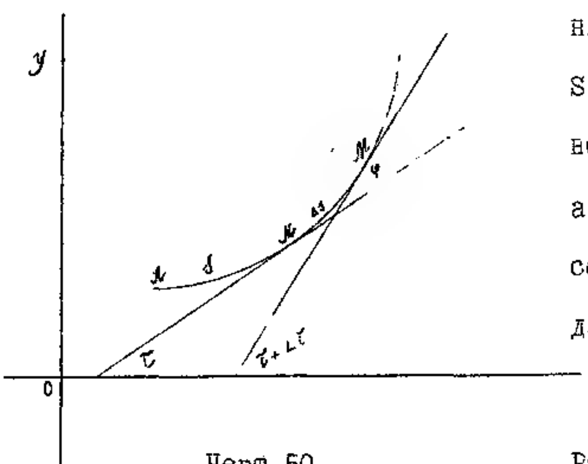
$$x=\varphi(t),\ y=\psi(t), \qquad (2)$$

то τ есть функція параметра t. Для точки M', соотвѣтствующей значенію параметра = $t + \Delta t$, уголъ касательной съ осью абсциссъ будетъ $\tau + \Delta\tau$. Проводя черезъ какую-либо точку O прямыя, параллельныя касательнымъ и оси X, непосредственно видимъ, что уголъ φ между двумя касательными въ точкахъ M и M' равенъ $\Delta\tau$ (см. черт.49).



Черт.49.

Обозначаемъ черезъ S разстояніе точки M, считая по данной кривой, отъ какой-либо точки A, выбранной за начало счета дугъ (чертежъ 50); S есть нѣкоторая функція параметра t, и разстояніе точки M' отъ A есть $S + \Delta S$, а слѣдовательно дуга MM' равна ΔS, а кривизна въ точкѣ M, согласно опредѣленію, данному выше, равна:



Черт.50.

$$K = \lim_{\Delta s=0} \frac{\Delta\tau}{\Delta S}.$$

Раздѣливъ числителя и знаменателя на приращеніе Δt параметра t, имѣемъ:

$$K=\lim_{\Delta t=0}\frac{\frac{\Delta\tau}{\Delta t}}{\frac{\Delta s}{\Delta t}}=\frac{\frac{d\tau}{dt}}{\frac{ds}{dt}}=\frac{d\tau}{ds} \qquad (3)$$

Предполагая, что кривая опредѣляется двумя уравненіями (2), имѣемъ:

$$tg\tau = \frac{y'}{x'} \qquad \text{и слѣд.} \qquad \tau = arctg\,\frac{y'}{x'}. \qquad (4)$$

Дифференцируя по t, получаемъ:

$$\frac{d\tau}{dt} = \frac{\dfrac{x'y''-x''y'}{x'^2}}{1+\dfrac{y'^2}{x'^2}} = \frac{x'y''-x''y'}{x'^2+y'^2}; \qquad (5)$$

Кромѣ того имѣемъ:

$$\frac{ds}{dt} = \sqrt{x'^2+y'^2} \qquad (6)$$

Подставляя эти выраженія въ равенство (3), приходимъ къ слѣдующей формулѣ для кривизны кривой въ данной точкѣ:

$$K = \frac{x'y''-x''y'}{(x'^2+y'^2)^{\frac{3}{2}}}; \qquad (7)$$

при этомъ передъ корнемъ квадратнымъ, входящимъ въ это выраженіе, подразумѣваемъ знакъ +, подобно тому какъ это имѣетъ мѣсто въ равенствѣ (6). Замѣтимъ, что выборъ этого знака соотвѣтствуетъ выбору направленія отсчета дугъ кривой, а слѣдовательно выбору положительнаго направленія на касательныхъ.

Сравнивая выраженіе (7) для кривизны съ выраженіемъ (11) предшествующаго параграфа для радіуса R соприкасающагося круга, имѣемъ:

$$K^2 = \frac{1}{R^2} \qquad (8)$$

Соотношеніе (8) наводитъ на мысль ввести новую величину ρ, полагая

$$K = \frac{1}{\rho} \qquad (9)$$

Въ такомъ случаѣ имѣемъ

$$|\rho| = R \qquad (10)$$

если подъ R разумѣемъ абсолютную величину радіуса соприкасающагося круга. Изъ равенствъ (7) и (9) слѣдуетъ

$$\rho = \frac{(x'^2 + y'^2)^{\frac{3}{2}}}{(x'y'' - x''y')} \quad ; \tag{11}$$

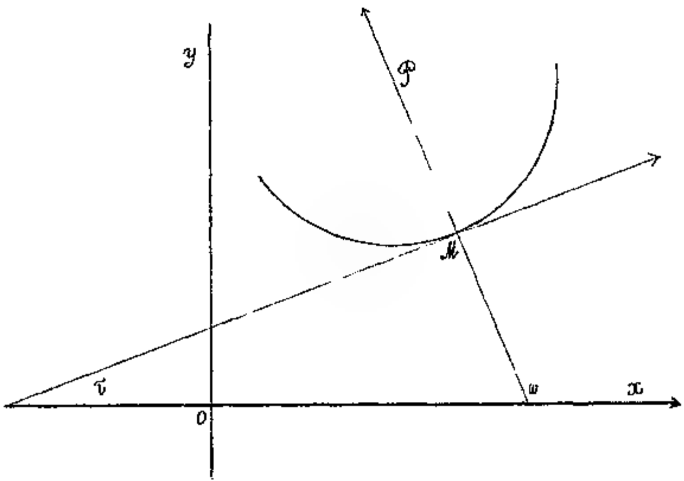
такимъ образомъ ρ есть количество строго опредѣленное какъ по абсолютной величинѣ, такъ и по знаку. Будемъ называть ρ р а д і у с о м ъ к р и в и з н ы; мы видимъ такимъ образомъ, что абсолютная величина радіуса кривизны совпадаетъ съ радіусомъ R соприкасающагося круга, но при этомъ слѣдуетъ замѣтить, что радіусъ кривизны можетъ имѣть какъ положительныя, такъ и отрицательныя значенія. Такъ какъ соприкасающійся кругъ въ каждой точкѣ данной кривой можетъ служить, согласно предыдущему, для опредѣленія кривизны (по крайней мѣрѣ ея абсолютной величины), то становится понятнымъ, почему его называютъ к р у г о м ъ к р и в и з н ы.

Постараемся рѣшить вопросъ, въ какомъ случаѣ радіусъ кривизны имѣетъ положительное значеніе и въ какомъ - отрицательное. Для этой цѣли обращаемся къ формуламъ (10)предшествующаго параграфа, опредѣляющимъ координаты α, β центра кривизны; вводя въ нихъ радіусъ кривизны ρ, опредѣляемый равенствомъ (11) настоящаго параграфа, имѣемъ:

$$\alpha - x = -\frac{y'}{\sqrt{x'^2+y'^2}} \cdot \rho \; ; \; \beta - y = \frac{x'}{\sqrt{x'^2+y'^2}} \cdot \rho \tag{12}$$

$$\frac{\alpha - x}{\rho} = -\frac{y'}{\sqrt{x'^2+y'^2}} \; ; \; \frac{\beta - y}{\rho} = \frac{x'}{\sqrt{x'^2+y'^2}} \; , \tag{13}$$

при чемъ передъ радикаломъ $\sqrt{x'^2 + y'^2}$ подразумѣваемъ знакъ $+$. Правыя части равенствъ (13) имѣютъ простое геометрическое значенiе, а именно равняются соотвѣтственно косинусу и синусу угла, образуемаго нормалью къ данной кривой съ осью X. Въ самомъ дѣлѣ, выберемъ за положительное направленiе нормали то, которое получается отъ поворота положительнаго направленiя касательной на прямой уголъ противъ стрѣлки часовъ (см. черт.51), и обозначимъ черезъ ω уголъ, который это направленiе образуетъ съ положительнымъ направленiемъ оси X. Если уголъ, который образуетъ положительное направленiе касательной съ положительнымъ направленiемъ оси X, есть τ, то



Черт.51.

$$\omega = \tau + \frac{\pi}{2},$$

такъ какъ для перехода къ нормали мы должны повернуть касательную на уголъ $+\frac{\pi}{2}$. Такимъ образомъ

$$\cos\omega = \cos\left(\tau + \frac{\pi}{2}\right) = -\sin\tau; \quad \sin\omega = \sin\left(\tau + \frac{\pi}{2}\right) = \cos\tau$$

или, въ силу формулъ, выведенныхъ въ свое время для $\cos\tau$ и $\sin\tau$,

$$\cos\omega = -\frac{y'}{\sqrt{x'^2 + y'^2}}, \qquad \sin\omega = \frac{x'}{\sqrt{x'^2 + y'^2}}.$$

Равенства (13) принимаютъ у насъ, такимъ образомъ, слѣдующiй видъ:

$$\frac{\alpha - x}{\rho} = \cos\omega\ ; \quad \frac{\beta - y}{\rho} = \sin\omega\ . \qquad (14)$$

Съ другой стороны, разсматривая центръ кривизны Р (черт.51) въ точкѣ М данной кривой и обозначивъ черезъ ω_1 уголъ, который отрѣзокъ МР образуетъ съ положительнымъ направленіемъ оси Х, мы имѣемъ

$$\alpha - x = MP.\cos\omega_1\ , \quad \beta - y = MP.\sin\omega_1$$

такъ какъ разности $\alpha - x$ и $\beta - y$ равны проекціямъ отрѣзка МР на оси координатъ. Раздѣливъ обѣ части полученныхъ равенствъ на МР, получаемъ

$$\frac{\alpha - x}{MP} = \cos\omega_1\ , \quad \frac{\beta - y}{MP} = \sin\omega_1\ , \qquad (15)$$

при чемъ подъ МР разумѣемъ абсолютную величину этого отрѣзка, такъ какъ при опредѣленіи угла ω_1 мы считали за положительное направленіе отрѣзка направленіе отъ М къ Р. Такъ какъ Р есть центръ кривизны, то абсолютная величина радіуса кривизны ρ совпадаетъ съ величиной отрѣзка МР, и слѣдовательно мы имѣемъ

$$\rho = +MP \qquad \text{или} \qquad \rho = -MP$$

въ зависимости отъ того, имѣемъ ли радіусъ кривизны положительное или отрицательное значеніе въ разсматриваемой точкѣ кривой. Сопоставляя формулы (14) и (15), мы въ первомъ случаѣ получаемъ

$$\cos\omega_1 = \cos\omega\ , \quad \sin\omega_1 = \sin\omega\ ,$$

и слѣдовательно $\omega_1 = \omega$ (до кратныхъ 2π), а во второмъ

$$\cos\omega_1 = \cos\omega\ , \quad \sin\omega_1 = \sin\omega\ ,$$

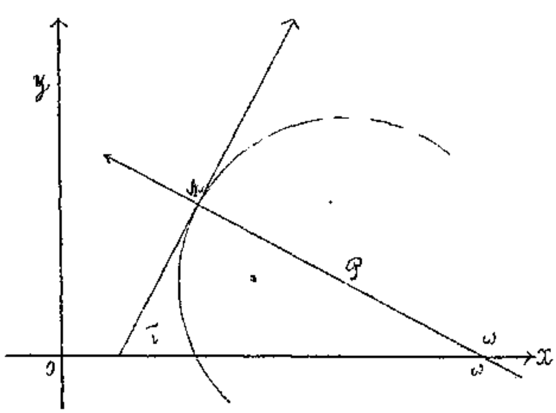
и слѣдовательно

$$\omega_1 = \pi + \omega\ .$$

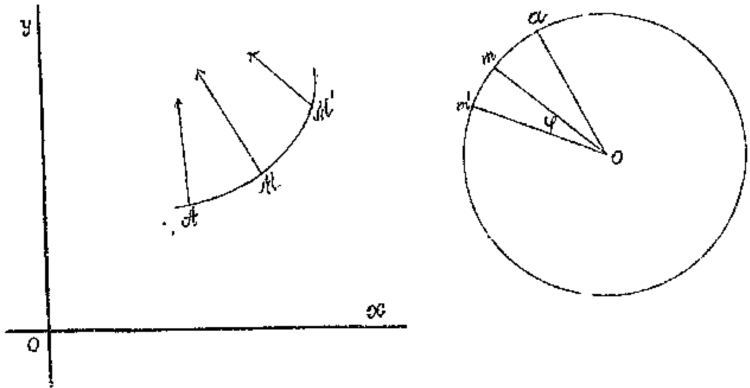
Такимъ образомъ, въ первомъ случаѣ направленіе отъ точки М кривой къ центру кривизны Р совпадаетъ съ положительнымъ направленіемъ нормали, а во второмъ случаѣ - противоположно ему.

Если условимся называть положительной нормалью полу-лучъ (полупрямую), исходящій изъ точки М кривой въ положительномъ направленіи нормали, и отрицательной нормалью - другой полу-лучъ, то результаты, полученные нами, можемъ формулировать слѣдующимъ образомъ: радіусъ кривизны положителенъ, если центръ кривизны лежитъ на положительной нормали, и отрицателенъ, если центръ кривизны лежитъ на отрицательной нормали. Чертежъ 51-ый соотвѣтствуетъ первому случаю; для иллюстраціи второго случая можетъ служить чер.52.

Черт.52.



Введенное нами понятіе о положительной нормали позволяетъ дать новое опредѣленіе кривизнѣ кривой линіи. Въ самомъ дѣлѣ, уголъ между двумя касательными въ двухъ точкахъ кривой, очевидно, равенъ углу между соотвѣтствующими положительными нормалями; поэтому, если мы бу-



Черт.53.

демъ черезъ произвольную точку O проводить лучи въ направленіи положительныхъ нормалей, то уголъ φ между двумя такими лучами, соотвѣтствующими двумъ точкамъ M и M′ данной кривой, совпадаетъ съ угломъ φ, о которомъ шла рѣчь въ началѣ параграфа. Опишемъ изъ точки O какъ изъ центра радіусомъ = 1 окружность (черт.53), которая пересѣчетъ каждый изъ нашихъ лучей (точнѣе - полу-лучей) въ одной точкѣ. Такимъ образомъ каждой точкѣ M данной кривой соотвѣтствуетъ опредѣленная точка m нашей окружности, лежащая на радіусѣ, параллельномъ соотвѣтствующей положительной нормали. Такъ какъ радіусъ окружности = 1, то дуга mm′, соотвѣтствующая дугѣ MM′ данной кривой, равна углу φ между радіусами Om и Om′, а слѣдовательно средняя кривизна дуги кривой MM′ можетъ быть опредѣлена какъ отношеніе дуги окружности mm′ къ дугѣ кривой MM′. Обозначая черезъ S длину дуги кривой AM, отсчитываемую отъ нѣкоторой точки A, и черезъ σ - длину дуги окружности am, отсчитываемую отъ соотвѣтствующей точки a, получаемъ для кривизны K въ точкѣ M данной кривой выраженіе:

$$K = \frac{d\sigma}{ds} \qquad (16)$$

Возвращаясь къ формулѣ (11) для радіуса кривизны ρ, замѣчаемъ, что знаменатель $x'y'' - x''y'$ исчезаетъ для точекъ перегиба на данной кривой; такимъ образомъ, въ точкахъ перегиба радіусъ кривизны равенъ безконечности; отсюда заключаемъ, что кругъ кривизны въ точкѣ перегиба кривой обращается въ прямую линію, притомъ очевидно въ касательную; это вполнѣ согласуется съ тѣмъ фактомъ, что касательная въ точкѣ перегиба находится въ соприкосновеніи в т о р о г о порядка съ данной кривой.

Предположимъ въ частности, что произвольный параметръ, входящій въ формулу (11), равенъ x, т.е. кривая опредѣляется уравненіемъ

$$y = f(x) \qquad (17)$$

въ Декартовыхъ координатахъ. Выраженіе (11) для радіуса кривизны при этомъ принимаетъ видъ

$$\rho = \frac{\left[1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right]^{\frac{3}{2}}}{\frac{d^2y}{dx^2}} \qquad (18)$$

Формула (18) содержитъ функцію $y = f(x)$ и ея производныя первыхъ двухъ порядковъ; отсюда мы заключаемъ, что всѣ кривыя которыя въ данной точкѣ находятся въ соприкосновеніи 2-го порядка, имѣютъ въ этой точкѣ одинъ и тотъ же радіусъ кривизны.

Предположимъ, что произвольный параметръ t, входящій въ уравненія (2) данной кривой, равенъ въ частности дугѣ s кривой (отсчитываемой отъ какой-либо опредѣленной точки). Въ такомъ случаѣ имѣемъ

$$x'^2+y'^2=\frac{ds^2}{ds^2}=1 \qquad (19)$$

и слѣдовательно формулы (7) и (11) принимаютъ видъ

$$K=\frac{1}{\rho}=x'y''-x''y' \qquad (20)$$

Возводя въ квадратъ и замѣчая, что выраженіе $x'y''-x''y'$ есть детерминантъ 2-го порядка, получаемъ

$$K^2=\frac{1}{\rho^2}=\begin{vmatrix} x'^2+y'^2, & x'x''+y'y'' \\ x'x''+y'y'', & x''^2+y''^2 \end{vmatrix};$$

принимая во вниманіе равенство (19) и равенство

$$x'x''+y'y''=0 \qquad (21)$$

получаемое дифференцированіемъ равенства (19) по S, получаемъ

$$K^2=\frac{1}{\rho^2}=x''^2+y''^2 \qquad (22)$$

или въ болѣе полномъ видѣ:

$$K^2=\frac{1}{\rho^2}=\left(\frac{d^2x}{ds^2}\right)^2+\left(\frac{d^2y}{ds^2}\right)^2 \qquad (22')$$

Изъ формулы (20) мы получаемъ кривизну K или радіусъ кривизны ρ въ функціи дуги S. Уравненіе вида $K = f(S)$ или $\rho = f_1(S)$, которое мы получимъ, или даже вообще уравненіе вида $F(\rho, S) = 0$ называютъ натуральнымъ уравненіемъ кривой (natürliche Gleichung, équation intrinseque, equazione intrinseca). Уравненіе это, выражая связь между радіусомъ кривизны и дугой (отсчитываемой отъ опредѣленной точки кривой), не зависитъ совершенно отъ положенія кривой на плоскости; оно мѣняется лишь съ измѣненіемъ формы кривой.

Разсмотримъ нѣсколько частныхъ примѣровъ на опредѣленіе радіуса кривизны.

ПРИМѢРЪ I. Разсмотримъ кривую, опредѣляемую уравненіемъ

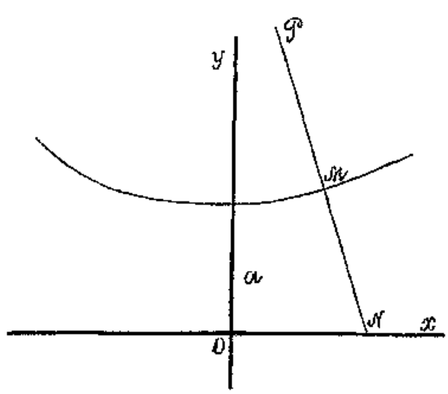
$$y = \frac{a}{2}\left(e^{\frac{x}{a}} + e^{-\frac{x}{a}}\right).$$

Кривая эта называется цѣпной линіей; форму этой линіи принимаетъ тяжелая гибкая нить (а слѣдовательно съ извѣстнымъ приближеніемъ - цѣпь), подвѣшенная въ двухъ точкахъ. Уравненіе цѣпной линіи не измѣняется при замѣнѣ X черезъ $-X$; слѣдовательно кривая наша симметрична относительно оси $У$. При $X = 0$ имѣемъ $y = a$; при безпредѣльномъ возрастаніи X по абсолютной величинѣ, $У$, оставаясь положительнымъ (при $a > 0$), возрастаетъ до безконечности. Дифференцируя уравненіе кривой два раза, имѣемъ:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{2}\left(e^{\frac{x}{a}} - e^{-\frac{x}{a}}\right); \qquad \frac{d^2y}{dx^2} = \frac{1}{2a}\left(e^{\frac{x}{a}} + e^{-\frac{x}{a}}\right).$$

Такъ какъ вторая производная при всевозможныхъ значеніяхъ X остается положительной, то слѣдовательно кривая во всѣхъ своихъ точкахъ обращена къ оси X своей выпуклостью (см. черт.54). Вставляя полученныя нами выраженія первой и второй производныхъ въ формулу (13), имѣемъ:

Черт.54.



$$\rho = \frac{[1 + \frac{1}{4}(e^{\frac{2x}{a}} - 2 + e^{-\frac{2x}{a}})]^{\frac{3}{2}}}{\frac{1}{2a}(e^{\frac{x}{a}} + e^{-\frac{x}{a}})} = \frac{\frac{1}{8}(e^{\frac{x}{a}} + e^{-\frac{x}{a}})^3}{\frac{1}{2a}(e^{\frac{x}{a}} + e^{-\frac{x}{a}})} = \frac{a}{4}(e^{\frac{x}{a}} + e^{-\frac{x}{a}})^2,$$

или, въ силу уравненія кривой

$$\rho = \frac{y^2}{a}.$$

Такимъ образомъ, ордината точки кривой есть среднее геометрическое между радіусомъ кривизны и отрѣзкомъ a, отсѣкаемымъ кривой на оси У. Вычислимъ длину нормали MN. Въ силу общихъ формулъ имѣемъ:

$$MN = y\sqrt{1 + (\frac{dy}{dx})^2} = \frac{a}{2}(e^{\frac{x}{a}} + e^{-\frac{x}{a}}) \cdot \frac{1}{2}(e^{\frac{x}{a}} + e^{-\frac{x}{a}}) =$$

$$= \frac{a}{4}(e^{\frac{x}{a}} + e^{-\frac{x}{a}})^2 = \rho.$$

Такимъ образомъ, радіусъ кривизны равенъ отрѣзку нормали MN; замѣтимъ однако при этомъ, что направленъ онъ въ противоположную сторону, такъ какъ центръ кривизны P (чер.54) лежитъ въ сторону вогнутости кривой.

ПРИМѢРЪ II. Опредѣлимъ радіусъ кривизны циклоиды, опредѣляемой уравненіями:

$$x = a(\varphi - \sin\varphi), \qquad y = a(1 - \cos\varphi),$$

гдѣ φ - произвольный параметръ.

Дифференцируя по φ, имѣемъ:

$$x' = a(1 - \cos\varphi), \qquad y' = a\sin\varphi$$

$$x'' = a\sin\varphi, \qquad y'' = a\cos\varphi$$

и слѣдовательно

$$x'^2 + y'^2 = a^2(1 - 2\cos\varphi + \cos^2\varphi + \sin^2\varphi) = 2a^2(1 - \cos\varphi) =$$

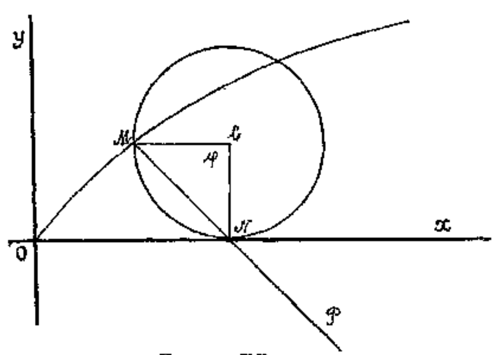
$$= 4a^2\sin^2\frac{\varphi}{2}.$$

$$x'y'' - x''y' = a^2(\cos\varphi - \cos^2\varphi - \sin^2\varphi) = a^2(\cos\varphi - 1) = -2a^2\sin^2\frac{\varphi}{2}.$$

Вставляя полученныя выраженія въ формулу (11), получаемъ:

$$\rho = \frac{8a^3\sin^3\frac{\varphi}{2}}{-2a^2\sin^2\frac{\varphi}{2}} = -4a\sin\frac{\varphi}{2}.$$

При измѣненіи φ отъ нуля до 2π будемъ имѣть для ρ отрицательныя значенія, слѣдовательно радіусъ кривизны направленъ въ сторону отрицательной нормали; такъ какъ положительное направленіе на циклоидѣ соотвѣтствуетъ направленію возрастанія φ, т.е. направленію слѣва направо (направленіе движенія катящагося круга, который описываетъ циклоиду), то положительная нормаль направлена вверхъ, точнѣе - наружу по отношенію къ разсматриваемой вѣтви циклоиды, и слѣдовательно радіусъ кривизны направленъ внутрь, т.е. въ сторону вогнутости циклоиды, какъ это и должно быть (см. черт. 55-ый). Мы видѣли,



Черт.55.

что нормаль циклоиды проходитъ черезъ точку прикосновенія образующаго круга къ оси X; такимъ образомъ отрѣзокъ нормали MN есть основаніе равнобедреннаго треугольника MCN (черт.55), у котораго боковыя стороны суть радіусы образующаго круга и слѣдовательно равны a, а уголъ при вершинѣ C равенъ φ. Рѣшая треугольникъ MCN, имѣемъ:

$$MN = 2a\sin\frac{\varphi}{2},$$

и слѣдовательно абсолютная величина радіуса кривизны $|\rho|$ равна удвоенной нормали. Такимъ образомъ, чтобы построить центръ кривизны P, достаточно продолжить нормаль MN на отрѣзокъ NP = MN (черт.55).

ПРИМѢРЪ III. Опредѣлимъ радіусъ кривизны окружности, данной уравненіемъ

$$(x-a)^2 + (y-b)^2 = R^2.$$

Дифференцируемъ два раза по x, считая y неявной функціей x; получаемъ:

$$(x-a) + (y-b)\frac{dy}{dx} = 0$$

$$1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2 + (y-b)\frac{d^2y}{dx^2} = 0.$$

Изъ перваго равенства

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{x-a}{y-b},$$

и слѣдовательно

$$1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2 = \frac{(y-b)^2 + (x-a)^2}{(y-b)^2} = \frac{R^2}{(y-b)^2}.$$

Вставляя во второе, получаемъ

$$\frac{d^2y}{dx^2} = -\frac{R^2}{(y-b)^3},$$

и слѣдовательно по общей формулѣ (18)

$$\rho = -\frac{R^3(y-b)^3}{(y-b)^3 . R^2} = -R.$$

Такимъ образомъ, радіусъ кривизны окружности во всѣхъ точкахъ имѣетъ постоянную величину и совпадаетъ съ радіусомъ R окружности по своей абсолютной величинѣ, что, впрочемъ, непосредственно очевидно изъ самаго опредѣленія кривизны.

Знакъ минусъ, входящій въ выраженіе ρ, указываетъ, что центръ кривизны лежитъ на отрицательной нормали, и не трудно удостовѣриться, что это дѣйствительно такъ: центръ кривизны совпадаетъ съ центромъ круга, а положительныя нормали, какъ легко убѣдиться, всѣ направлены внѣ круга.

Въ заключеніе замѣтимъ, что если кривая опредѣляется уравненіемъ

$$F(x,y)=0 \tag{23}$$

въ Декартовыхъ координатахъ, то для вычисленія радіуса кривизны по формулѣ (18) мы можемъ опредѣлить производныя

$$\frac{dy}{dx} \quad \text{и} \quad \frac{d^2y}{dx^2},$$

дифференцируя два раза по X уравненіе (23), въ предположеніи, что У есть неявная функція X, подобно тому какъ мы это дѣлали въ примѣрѣ 3-мъ. Обозначая черезъ F_1, F_2, F_{11}, F_{12}, F_{22} частныя производныя перваго и второго порядка функціи F по перемѣннымъ X и У, получимъ окончательно слѣдующее выраженіе для радіуса кривизны:

$$\rho = -\frac{\left(F_1^2+F_2^2\right)^{\frac{3}{2}}}{F_{11}F_2^2-2F_{12}F_1F_2+F_{22}F_1^2} \tag{24}$$

15. Эволюты (развертки) и эвольвенты (развертывающія).

Въ § 13 уже было упомянуто, что эволютой (разверткой) данной кривой называется геометрическое мѣсто ея центровъ кривизны; обратно, данная кривая называется эвольвентой (развертывающей) своей эволюты. Вообще, эвольвентой какой-либо кривой называютъ всякую кривую, для которой первоначальная кривая служитъ эволютой.

Въ томъ же § 13 было указано, что формулы, опредѣляющія координаты α, β центра кривизны для любой точки данной кривой, могутъ быть разсматриваемы какъ уравненія эволюты. Въ частномъ случаѣ, когда данная кривая опредѣляется уравненіемъ вида

$$y = f(x),$$

мы должны примѣнить формулы (13) параграфа 13-го, которыя дадутъ намъ

$$\alpha = \varphi(x), \quad \beta = \psi(x);$$

исключая изъ этихъ равенствъ x, получаемъ уравненіе

$$\Phi(\alpha, \beta) = 0$$

эволюты въ Декартовыхъ координатахъ.

Предположимъ теперь, что данная кривая опредѣляется двумя уравненіями

$$x = \varphi(s), \quad y = \psi(s) \qquad (1)$$

гдѣ s есть дуга кривой, отсчитываемая отъ нѣкоторой опредѣленной точки. Воспользуемся формулами (12) параграфа 14-го для опредѣленія координатъ α, β центра кривизны, при чемъ мы должны въ частности положить произвольный параметръ t равнымъ дугѣ s, и слѣдовательно

$$x'^2 + y'^2 = 1. \qquad (2)$$

Такимъ образомъ получаемъ

$$\alpha = x - y' \cdot \rho, \quad \beta = y + x' \cdot \rho \qquad (3)$$

гдѣ ρ - радіусъ кривизны и гдѣ

$$x' = \frac{dx}{ds}, \qquad y' = \frac{dy}{ds},$$

Равенства (3) даютъ намъ α и β въ функціи параметра s и слѣдовательно могутъ быть разсматриваемы какъ уравненія эволюты. Мы воспользуемся ими для вывода важнѣйшихъ свойствъ эволюты.

Докажемъ во-первыхъ, что нормаль въ точкѣ данной кривой касается эволюты въ соотвѣтствующей точкѣ. Замѣтимъ при этомъ, что двумя соотвѣтствующими точками на данной кривой (эвольвентѣ) и на ея эволютѣ мы, понятно, называемъ такія двѣ точки M и P, изъ которыхъ вторая служитъ центромъ кривизны по отношенію къ первой. Такъ какъ центръ кривизны лежитъ на нормали данной кривой, то слѣдовательно для доказательства нашего положенія достаточно показать, что направленіе нормали совпадаетъ съ направленіемъ касательной къ эволютѣ въ соотвѣтствующей точкѣ, другими словами - что касательныя къ данной кривой и къ эволютѣ, проведенныя въ двухъ соотвѣтствующихъ точкахъ, взаимно-перпендикулярны. Обозначимъ черезъ τ и τ_1 углы, образованные съ осью X касательными къ данной кривой и къ эволютѣ. Въ такомъ случаѣ имѣемъ:

$$\cos\tau = x', \quad \sin\tau = y'$$

$$\cos\tau_1 = \frac{\alpha'}{\sqrt{\alpha'^2+\beta'^2}}, \quad \sin\tau_1 = \frac{\beta'}{\sqrt{\alpha'^2+\beta'^2}},$$

гдѣ значкомъ ' отмѣчено дифференцированіе по s. Условіе перпендикулярности двухъ касательныхъ можетъ быть написано въ видѣ:

$$\cos(\tau - \tau_1) = \cos\tau.\cos\tau_1 + \sin\tau.\sin\tau_1 = 0,$$

или, по подстановкѣ значенiй тригонометрическихъ функцiй угловъ τ и τ_1 и по освобожденiи отъ знаменателя:

$$\alpha' . x' + \beta' y' = 0 \qquad (4)$$

Дифференцируя равенства (3) по s, имѣемъ:

$$\alpha' = x' - y'\rho' - y''\rho$$

$$\beta' - y' + x'\rho' + x''\rho \qquad (5)$$

Умножая первое изъ полученныхъ равенствъ на X', второе - на Y' и складывая, получаемъ:

$$\alpha' x' + \beta' y' = x'^2 + y'^2 - \rho\,(x'y'' - x''y').$$

Принимая во вниманiе равенство (2) и значенiе ρ (см. §14, форм.20), видимъ, что условiе (4) выполняется и слѣдовательно положенiе наше доказано.

Докажемъ теперь слѣдующую теорему: дифференцiалъ дуги эволюты равенъ дифференцiалу радiуса кривизны. Называя дугу эволюты черезъ σ, имѣемъ:

$$d\sigma = \sqrt{d\alpha^2 + d\beta^2} = \sqrt{\alpha'^2 + \beta'^2}\,.ds.$$

Съ другой стороны, дифференцiалъ радiуса кривизны

$$d\rho = \rho'.ds.$$

Итакъ, мы должны доказать справедливость соотношенiя

$$\sqrt{\alpha'^2 + \beta'^2} = \rho' \quad \text{или} \quad \alpha'^2 + \beta'^2 = \rho'^2 \qquad (6)$$

Возводя въ квадратъ и складывая почленно равенства (5), получаемъ:

$$\alpha'^2 + \beta'^2 = x'^2 + y'^2 + \rho'^2\,(x'^2 + y'^2) + \rho^2\,(x''^2 + y''^2) -$$
$$- 2\rho\,(x'y'' - x''y') + 2\rho\rho'\,(x'x'' + y'y'').$$

Принимая во вниманiе равенство (2) и равенство:

$$x'x'' + y'y'' = 0,$$

получаемое дифференцированіемъ его по s, а также формулы

$$\rho = \frac{1}{x'y'' - x''y'} \quad , \quad \frac{1}{\rho^2} = x''^2 + y''^2$$

(см. § 14, формулы 20 и 22), имѣемъ:

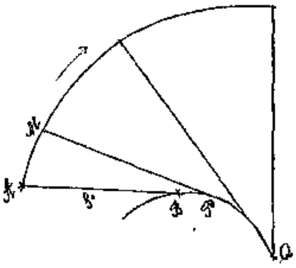
$$\alpha'^2 + \beta'^2 = \rho'^2,$$

и слѣдовательно соотношеніе (6) дѣйствительно имѣетъ мѣсто. По извлеченіи изъ двухъ частей корня квадратнаго и по умноженіи на ds, получаемъ $d\sigma = d\rho$, но при этомъ можетъ возникнуть сомнѣніе относительно знака. Сомнѣніе это впрочемъ легко устраняется, если обратимъ вниманіе на то, что въ нашемъ произволѣ находится выборъ положительнаго направленія для отсчета дугъ на эволютѣ. Если мы пишемъ соотношеніе между дугой эволюты и радіусомъ кривизны въ видѣ $d\sigma = d\rho$ (а не въ видѣ $d\sigma = -d\rho$), то это лишь означаетъ, что мы условились считать положительнымъ то направленіе на эволютѣ, которое соотвѣтствуетъ направленію возрастанія радіуса кривизны первоначальной кривой.

Мы доказали, что дифференціалы функцій σ и ρ равны; отсюда слѣдуетъ, что самыя функціи отличаются только на постоянное, т.е.

$$\sigma = \rho + const. \tag{7}$$

Постоянное, входящее въ соотношеніе (7), можно опредѣлить, если установимъ, отъ какой точки будемъ отсчитывать дугу σ эволюты. Такъ, если за начало дугъ на эволютѣ примемъ точку B (черт.58), соотвѣтствующую точкѣ A первоначальной кривой, въ которой радіусъ кривизны имѣетъ значеніе ρ_0, то



Черт.56.

для этой точки соотношеніе (7) принимаетъ видъ:

$$0 = \rho_0 + \text{const.},$$

и слѣдовательно const. $= -\rho_0$.

Вставляя это значеніе постояннаго въ соотношеніе (7), получаемъ:

$$\sigma = \rho - \rho_0\,, \text{ откуда } \rho = \rho_0 + \sigma \qquad (8)$$

Двѣ теоремы, доказанныя нами, позволяютъ очень просто строить эвольвенту по данной эволютѣ. Въ самомъ дѣлѣ, въ силу первой теоремы, касательныя эволюты служатъ нормалями эвольвенты, и слѣдовательно остается лишь на этихъ касательныхъ отложить отъ точекъ прикосновенія отрѣзки, равные соотвѣтствующимъ радіусамъ кривизны, для того чтобы получить точки эвольвенты; что касается до радіуса кривизны ρ въ какой-либо точкѣ, то его найдемъ по формулѣ (8), коль скоро намъ данъ радіусъ кривизны ρ_0 въ какой-нибудь одной опредѣленной точкѣ кривой, другими словами, если дана точка A эвольвенты, соотвѣтствующая точкѣ B эволюты (въ такомъ случаѣ ρ_0 = AB).

Предположимъ, что эволюта осуществлена у насъ какимъ-либо образомъ механически и что на ея контуръ намотана нить, укрѣпленная въ какой-нибудь точкѣ O; пусть эта нить отстаетъ отъ эволюты въ точкѣ B и пусть конецъ этой нити (натянутой) находится въ A. Будемъ развертывать эту нить, держа ее постоянно натянутой; тогда конецъ ея опишетъ данную кривую (эвольвенту), такъ какъ во всѣхъ своихъ положеніяхъ нить остяется касательной къ эволютѣ (см. черт.56) и длина свободной ея части РМ болѣе длины свободной части въ начальномъ положеніи, т.е. болѣе отрѣзка АВ, на смотанную часть, т.е. на дугу эволюты ВР, какъ этого и требуетъ соотношеніе (8). Такимъ образомъ мы можемъ описать кривую непрерывнымъ движеніемъ, разъ дана ея эволюта; изъ предыдущаго вмѣстѣ съ тѣмъ выясняется причина названій „эволюта" (развертка) и „эвольвента" (развертывающая).

ПРИМѢРЪ I. Найти эволюту эллипса

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

Мы можемъ замѣнить уравненіе эллипса двумя уравненіями

$$x = a\cos t, \qquad y = b\sin t,$$

гдѣ t - произвольный параметръ; въ самомъ дѣлѣ, по исключеніи t, мы приходимъ къ первоначальному уравненію. Дифференцируя выраженія X и Y по t, получаемъ:

$$x' = -a\sin t, \quad y' = b\cos t, \quad x'' = -a\cos t, \quad y'' = -b\sin t,$$

и слѣдовательно

$$x'^2 + y'^2 = a^2\sin^2 t + b^2\cos^2 t; \quad x'y'' - x''y' = ab(\sin^2 t + \cos^2 t) = ab.$$

Вставляя всѣ эти выраженія въ формулы (10) параграфа 13-го, имѣемъ:

$$\alpha = a\cos t - b\cos t.\frac{a^2\sin^2 t + b^2\cos^2 t}{ab} =$$

$$= \frac{a^2\cos t - a^2\cos t\sin^2 t - b^2\cos^3 t}{a} = \frac{a^2 - b^2}{a}\cos^3 t.$$

$$\beta = b\sin t - a\sin t.\frac{a^2\sin^2 t + b^2\cos^2 t}{ab} =$$

$$= \frac{b^2\sin^2 t - a^2\sin^3 t - b^2\sin t\cos t}{b} = \frac{b^2 - a^2}{b}\sin^3 t.$$

$$\text{или} \quad \alpha = \frac{c^2}{a} \cdot \cos^3 t, \quad \beta = -\frac{c^2}{b} \cdot \sin^3 t, \tag{9}$$

гдѣ $c^2 = a^2 - b^2$. Уравненія (9) опредѣляютъ эволюту эллипса. Исключая t, получаемъ уравненіе эволюты въ Декартовыхъ координатахъ:

$$\left(\frac{\alpha}{\frac{c^2}{a}}\right)^{\frac{2}{3}} + \left(\frac{\beta}{\frac{c^2}{b}}\right)^{\frac{2}{3}} = 1 \tag{10}$$

Очевидно, эволюта эллипса есть алгебраическая кривая (эволюта алгебраической кривой всегда есть тоже алгебраическая кривая). Чтобы опредѣлить порядокъ ея, обозначимъ для краткости

$$\frac{\alpha}{\frac{c^2}{a}} \quad \text{и} \quad \frac{\beta}{\frac{c^2}{b}}$$

соотвѣтственно черезъ A и B. Тогда уравненіе (10) перепишется въ видѣ

$$A^{\frac{2}{3}} + B^{\frac{2}{3}} = 1.$$

Возводя обѣ части въ кубъ, имѣемъ

$$A^2 + B^2 + 3A^{\frac{2}{3}} B^{\frac{2}{3}} (A^{\frac{2}{3}} + B^{\frac{2}{3}}) = 1,$$

или

$$A^2 + B^2 + 3A^{\frac{2}{3}} B^{\frac{2}{3}} = 1,$$

откуда

$$3A^{\frac{2}{3}} B^{\frac{2}{3}} = 1 - A^2 - B^2.$$

Возводя обѣ части въ кубъ, получаемъ окончательно

$$27\, A^2 B^2 = (1 - A^2 - B^2)^3.$$

Принимая во вниманіе значенія A и B, видимъ, что эволюта эллипса есть кривая 6-го порядка.

Возвращаясь къ уравненіямъ (9), видимъ, что при измѣненіи t отъ $\frac{\pi}{2}$ до 2π получаются значенія α и β, отличающіяся только знаками отъ значеній, получающихся при измѣненіи t отъ 0 до $\frac{\pi}{2}$; при $t = 2\pi$ получаемъ тѣ же значенія α и β , какъ и при $t = 0$, и вообще при $t > 2\pi$ повторяются всѣ прежнія значенія. Отсюда заключаемъ, что эволюта эллипса симметрична относительно главныхъ осей и представляетъ изъ себя замкнутую кривую. Изслѣдуя точку эволюты, соотвѣтствующую значенію параметра $t = 0$, т.е. точку $\alpha = \frac{c^2}{a}$, $\beta = 0$, убѣдимся, что она есть точка возврата 1-го рода, при чемъ касательной въ ней служитъ ось X. Совершенно также мы могли бы изслѣдовать точки эволюты, соотвѣтствующія значеніямъ $t = \frac{\pi}{2}$, π, $\frac{3\pi}{2}$, т.е. точки $(0, -\frac{c^2}{b})$, $(-\frac{c^2}{a}, 0)$ и $(0, \frac{c^2}{b})$; но и безъ такого изслѣдованія очевидно изъ симметріи кривой и изъ равноправности двухъ главныхъ осей эллипса, что всѣ эти точки суть тоже точки возврата 1-го рода. Такимъ образомъ, эволюта эллипса имѣетъ 4 точки возврата на двухъ главныхъ осяхъ эллипса. Тѣ точки возврата, лежащія на большой оси, имѣютъ абсциссы

$$\alpha = \pm \frac{c^2}{a} = \pm c.\frac{c}{a} = \pm ce,$$

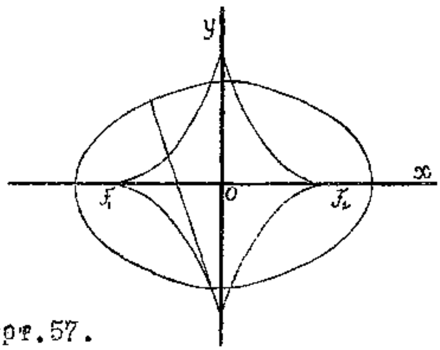
а такъ какъ для эллипса $e < 1$, то каждая изъ этихъ точекъ лежитъ между центромъ и фокусомъ. Обращаясь къ точкамъ возврата на малой оси, видимъ, что абсолютная величина ихъ ординатъ равна

$$\frac{c^2}{b} = b.\frac{c^2}{b^2} .$$

Выраженіе это больше или меньше малой полуоси, смотря по тому, болѣе или менѣе c^2, чѣмъ b^2 или, такъ какъ $c^2 = a^2-b^2$, то въ зависимости отъ того, какое изъ двухъ неравенствъ

$$a^2 \gtrless 2b^2 \quad \text{или} \quad a \gtrless b\sqrt{2}$$

имѣетъ мѣсто. При $a > b\sqrt{2}$ двѣ точки возврата, о которыхъ идетъ рѣчь, лежатъ внѣ эллипса; при $a < b\sqrt{2}$ - внутри эллипса, наконецъ при $a = b\sqrt{2}$ онѣ лежатъ на самомъ эллипсѣ. Чертежъ 57 соотвѣтствуетъ случаю $a > b\sqrt{2}$.



Черт.57.

Точки возврата эволюты, очевидно, соотвѣтствуютъ тѣмъ точкамъ эллипса, въ которыхъ радiусъ кривизны имѣетъ наибольшее или наименьшее значенiе (подобное соотношенiе имѣетъ мѣсто не только для эллипса; оно есть слѣдствiе доказанной нами общей теоремы о равенствѣ дифференцiаловъ радiуса кривизны и дуги эволюты); въ этихъ точкахъ, т.е. въ четырехъ вершинахъ эллипса, соприкасающiйся кругъ имѣетъ съ эллипсомъ соприкосновенiе не второго, а третьяго порядка.

ПРИМѢРЪ VI. Найти эволюту гиперболы

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

Вычисленiя можно вести совершенно аналогично тому, какъ мы вели ихъ для эллипса, вводя лишь вмѣсто тригонометрическихъ гиперболическiя функцiи параметра t, т.е. полагая

$$x = a.\frac{e^t + e^{-t}}{2}, \qquad y = b.\frac{e^t - e^{-t}}{2}$$

Легко убѣдиться, что исключенiе параметра t изъ этихъ двухъ равенствъ приводитъ къ уравненію гиперболы. Въ результатѣ получимъ выраженія координатъ центра кривизны α, β въ функціи X и У; исключая X, У изъ двухъ полученныхъ равенствъ и изъ уравненія гиперболы, получимъ уравненіе эволюты въ видѣ

$$\left[\frac{\alpha}{\frac{c^2}{a}}\right]^{\frac{2}{3}} - \left[\frac{\beta}{\frac{c^2}{b}}\right]^{\frac{2}{3}} = 1$$

гдѣ $c^2 = a^2 + b^2$. Эволюта гиперболы, очевидно, алгебраическая кривая 6-го порядка.

ПРИМѢРЪ III. Найти эволюту параболы.

Для упрощенія вычисленій предположимъ, что діаметръ параболы направленъ по оси У, такъ что она опредѣляется уравненіемъ

$$x^2 = 2py, \qquad \text{откуда} \quad y = \frac{x^2}{2p}.$$

Дифференцируя два раза по X, имѣемъ

$$\frac{dy}{dx} = \frac{x}{p}, \qquad \frac{d^2y}{dx^2} = \frac{1}{p}.$$

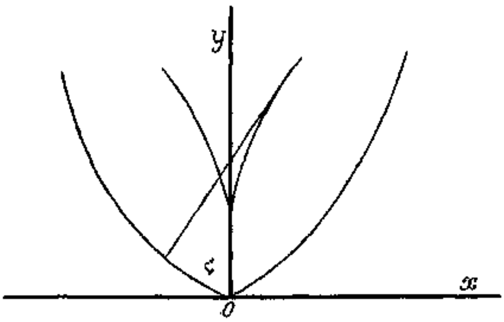
Вставляя въ формулы (16) параграфа 15-го, получаемъ:

$$\alpha = x - \frac{x}{p}\cdot\frac{1+\frac{x^2}{p^2}}{\frac{1}{p}} = \frac{x^3}{p^2}; \quad \beta = \frac{x^2}{2p} + \frac{1+\frac{x^2}{p^2}}{\frac{1}{p}} = p + \frac{3x^2}{2p}.$$

Исключая X, приходимъ къ уравненію эволюты параболы

$$p\alpha^2 = \frac{8}{27}(\beta - p)^3.$$

Сравнивая полученное нами уравненіе съ уравненіемъ $y^2=(x-a)^3$ которое мы изслѣдовали, легко убѣждаемся, что эволюта параболы (такъ называемая полукубическая парабола) имѣетъ въ точкѣ (0,p) на оси У точку возврата (1-го рода), касательной въ которой служитъ ось у, т.е. ось пара-



Черт.58.

болы. Чертежъ 58 даетъ понятіе о взаимномъ расположеніи параболы и ея эволюты.

ПРИМѢРЪ IV. Найти эволюту круга

$$x^2 + y^2 = R^2.$$

Дифференцируя два раза по X, имѣемъ:

$$x + y\frac{dy}{dx} = 0$$

$$1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2 + y\frac{d^2y}{dx^2} = 0,$$

откуда

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{x}{y}, \quad \frac{d^2y}{dx^2} = -\frac{x^2 + y^2}{y^3} = -\frac{R^2}{y^3}.$$

Вставляя въ формулы (12) параграфа 13-го, имѣемъ

$$\alpha = x - \frac{x}{y}\cdot\frac{1 + \frac{x^2}{y^2}}{\frac{x^2 + y^2}{y^3}} = 0$$

$$\beta = y - \frac{1 + \frac{x^2}{y^2}}{\frac{x^2 + y^2}{y^3}} = 0.$$

Такимъ образомъ для всѣхъ точекъ круга α и β имѣютъ одни и тѣ же значенія, и слѣдовательно мы не получаемъ эволюты - геометрическаго мѣста центровъ кривизны, или, если угодно, эволюта обращается въ одну точку - центръ круга, что впрочемъ очевидно и непосредственно.

ПРИМѢРЪ V. Найти эволюту циклоиды.

Циклоида опредѣляется двумя уравненіями:

$$x = a\,(\varphi - \sin\varphi),\quad y = a\,(1 - \cos\varphi),$$

гдѣ φ - произвольный параметръ. Дифференцируя по φ, имѣемъ

$$x' = a\,(1 - \cos\varphi),\quad y' = a\sin\varphi$$

$$x'' = a\sin\varphi,\qquad y'' = a\cos\varphi$$

и слѣдовательно

$$x'^2 + y'^2 = 4a^2\sin^2\frac{\varphi}{2};\quad x'y'' - x''y' = -2a^2\sin^2\frac{\varphi}{2}$$

Вставляя въ формулы (10) параграфа 13-го, получаемъ:

$$\alpha = a(\varphi - \sin\varphi) - a\sin\varphi\cdot\frac{4a^2\sin^2\frac{\varphi}{2}}{-2a^2\sin^2\frac{\varphi}{2}} = a\,(\varphi + \sin\varphi)$$

$$\beta = a(1-\cos\varphi) + a(1-\cos\varphi)\cdot\frac{4a^2\sin^2\frac{\varphi}{2}}{-2a^2\sin^2\frac{\varphi}{2}} = a\,(-1 + \cos\varphi).$$

Преобразуемъ систему координатъ, сохраняя направленіе осей, но принимая за начало точку (πa, $-2a$). Обозначая черезъ ξ, η координаты точки эволюты относительно новой системы, имѣемъ:

$$\alpha = \xi + \pi a,\qquad \beta = \eta - 2a,$$

откуда

$$\xi = \alpha - \pi a = a(\varphi - \pi + \sin\varphi)$$

$$\eta = \beta + 2a = a\,(1 + \cos\varphi) \tag{11}$$

Введемъ новый параметръ θ, полагая

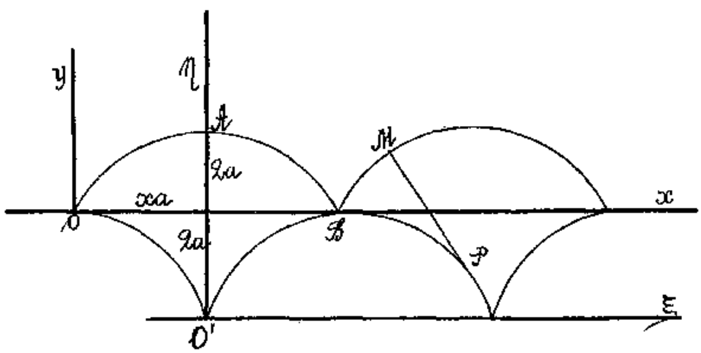
$$\varphi - \pi = \theta,\qquad \text{и слѣдовательно}\qquad \varphi = \pi + \theta;$$

тогда уравненія (11) принимаютъ видъ

$$\xi = a\,(\theta - \sin\theta),\quad \eta = a\,(1 - \cos\theta) \tag{12}$$

и для насъ становится теперь очевиднымъ, что эволюта циклоиды есть точно такая циклоида, притомъ равная первоначальной. Обращаясь къ формуламъ, связывающимъ координаты α, β и ξ, η, видимъ, что эволюта циклоиды получается передвиженіемъ данной циклоиды на отрѣзокъ πa вправо (въ сторону положительныхъ значеній X) и на отрѣзокъ 2а внизъ (въ сторону отрицательныхъ значеній У); при этомъ слѣдуетъ имѣть въ виду, что 2а есть діаметръ образующаго круга, а πa равняется половинѣ разстоянія между двумя смежными точками заостренія циклоиды.

Такимъ образомъ эволюта циклоиды расположена подъ данной циклоидой, притомъ такъ, что точки заостренія ея лежатъ подъ вершинами данной циклоиды; обратно, вершины эволюты совпадаютъ съ точками заостренія данной циклоиды (см. черт.59). Если мы въ точкѣ O эволюты укрѣпимъ нить O'A =4а,



Черт.59.

то при навертываніи этой нити на эволюту конецъ ея A опишетъ данную циклоиду.

16. КРИВИЗНА КРИВОЙ ВЪ ПОЛЯРНЫХЪ КООРДИНАТАХЪ.

Допустимъ, что кривая опредѣляется уравненіемъ въ полярныхъ координатахъ

$$r = f(\varphi) \tag{1}$$

гдѣ r – радіусъ-векторъ, а φ – полярный уголъ. [illegible] къ Декартовымъ координатамъ, имѣемъ:

$$x = r\cos\varphi = f(\varphi)\cos\varphi \qquad (2)$$
$$y = r\sin\varphi = f(\varphi)\sin\varphi$$

Равенства (2) можно разсматривать какъ уравненія данной кривой, такъ какъ они опредѣляютъ X и У въ функціи произвольнаго параметра φ. Такимъ образомъ, для вычисленія радіуса кривизны ρ мы можемъ непосредственно воспользоваться формулой (11) параграфа 14-го, полагая въ частности параметръ t равнымъ φ. Выполняя дифференцированія по φ, имѣемъ:

$$x' = -r\sin\varphi + r'\cos\varphi; \quad y' = r\cos\varphi + r'\sin\varphi$$
$$x'' = -r\cos\varphi - 2r'\sin\varphi + r''\cos\varphi; \quad y'' = -r\sin\varphi + 2r'\cos\varphi + r''\sin\varphi$$

и слѣдовательно

$$x'^2 + y'^2 = r^2(\sin^2\varphi + \cos^2\varphi) + r'^2(\sin^2\varphi + \cos^2\varphi) = r^2 + r'^2,$$

$$x'y'' - x''y' = r(-\sin\varphi . y'' - \cos\varphi . x'') + r'(\cos\varphi . y'' - \sin\varphi x'') =$$
$$= r\left[r(\sin^2\varphi + \cos^2\varphi) - r''(\sin^2\varphi + \cos^2\varphi)\right] + r' . 2r'(\sin^2\varphi + \cos^2\varphi) =$$
$$= r^2 + 2r'^2 - rr''.$$

Вставляя въ формулу для радіуса кривизны, получаемъ

$$\rho = \frac{(r^2 + r'^2)^{\frac{3}{2}}}{r^2 + 2r'^2 \quad rr''} \qquad (3)$$

или, вводя вмѣсто сокращенныхъ обозначеній полныя

$$\rho = \frac{\left[r^2 + \left(\frac{dr}{d\varphi}\right)^2\right]^{\frac{3}{2}}}{r^2 + 2\left(\frac{dr}{d\varphi}\right)^2 - r\frac{d^2r}{d\varphi^2}} \qquad (4)$$

Для опредѣленія эволюты можемъ воспользоваться общими формулами, предполагая, что кривая опредѣляется двумя уравненіями (2).

ПРИМѢРЪ. Разсмотримъ логариѳмическую спираль, опредѣляемую уравненіемъ

$$r = ae^{k\varphi}.$$

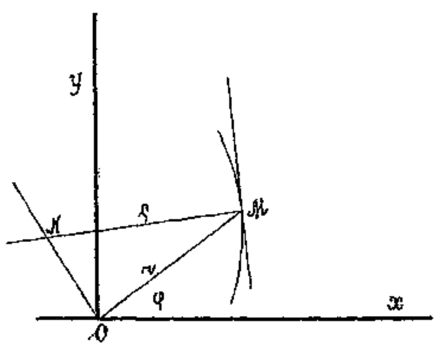
Дифференцируя по φ, имѣемъ

$$\frac{dr}{d\varphi} = ke^{k\varphi} = kr, \quad \frac{d^2r}{d\varphi^2} = k^2ae^{k\varphi} = k^2r.$$

Вставляя въ формулу (4), получаемъ радіусъ кривизны

$$\rho = \frac{(1+k^2)^{\frac{3}{2}}.r^3}{r^2+2r^2.k^2-k^2r^2} = (1+k^2)^{\frac{1}{2}}.r = ae^{k\varphi}.\sqrt{1+k^2}.$$

Пусть N есть центръ кривизны въ точкѣ M логариѳмической спирали (черт.60). Эволюта логариѳмической спирали есть геометрическое мѣсто точекъ N, и легко усмотрѣть, что это геометрическое мѣсто есть логариѳмическая спираль, равная данной. Въ самомъ дѣлѣ, при перемѣщеніи точки M по данной спирали (черт.60),



Черт.60.

треугольникъ OMN вращается, оставаясь себѣ подобнымъ, такъ какъ сторона MN въ немъ измѣняется пропорціонально OM, а уголъ при M имѣетъ постоянную величину, дополняя до прямого угла уголъ радіуса-вектора съ касательной, который для логариѳмической спирали имѣетъ постоянную величину. Такимъ образомъ, радіусъ-векторъ ON точки N измѣняется пропорціонально радіусу-вектору r точки M и образуетъ съ нимъ постоянный уголъ. Отсюда мы заключаемъ, что геометрическое мѣсто точки N есть кривая, подобная данной логариѳмической спирали относительно центра подобія O, притомъ повернутая на нѣкоторый уголъ относительно данной спирали. Но кривая, подобная логариѳмической спирали, есть тоже логариѳмическая спираль и отличается лишь положеніемъ на плоскости отъ данной спирали; слѣдовательно эволюта логариѳмической спирали есть логариѳмическая спираль, равная данной.

17. Огибающая семейства кривыхъ.

Предположимъ, что намъ дано уравненіе

$$\mathcal{F}(x, y, t) = 0 \qquad (1)$$

въ Декартовыхъ координатахъ, содержащее произвольный параметръ t. Для каждаго даннаго значенія t уравненіе (1) опредѣляетъ нѣкоторую кривую; при измѣненіи t получаемъ безчисленное множество кривыхъ, образующихъ такъ называемое семейство кривыхъ; притомъ въ данномъ случаѣ имѣемъ семейство кривыхъ, зависящее отъ одного параметра. Разсмотримъ двѣ кривыя семейства, соотвѣтствующія значеніямъ параметра: t и $t + \Delta t$. Первая изъ нихъ опредѣляется уравненіемъ (1), вторая - уравненіемъ

$$\mathcal{F}(x, y, t + \Delta t) = 0 \qquad (2)$$

Координаты точекъ пересѣченія этихъ двухъ кривыхъ опредѣляются изъ двухъ уравненій (1) и (2) или изъ равносильной имъ системы

$$\mathcal{F}(x, y, t) = 0$$

$$\frac{\mathcal{F}(x, y, t + \Delta t) - \mathcal{F}(x, y, t)}{\Delta t} = 0 \qquad (3)$$

въ которой второе уравненіе получено вычитаніемъ уравненія (1) изъ уравненія (2) и дѣленіемъ результата на Δt. Предположимъ, что приращеніе Δt параметра уменьшается (по абсолютной величинѣ), стремясь къ нулю; въ такомъ случаѣ вторая изъ разсматриваемыхъ кривыхъ приближается къ первой, совпадая съ ней въ предѣлѣ; точки пересѣченія первой кривой со второй при этомъ перемѣщаются по первой кривой съ измѣненіемъ Δt; если функція $F(x,y,t)$ допускаетъ частную производную по t, то для $\Delta t = 0$ мы получаемъ вполнѣ опредѣленное предѣльное положеніе упомянутыхъ точекъ пересѣченія. Въ самомъ дѣлѣ, предполагая Δt безконечно-малымъ и переходя къ предѣлу для $\Delta t = 0$, мы получаемъ при сдѣланномъ нами допущеніи

$$\lim \frac{F(x,y,t+\Delta t)-F(x,y,t)}{\Delta t}=\frac{\partial F(x,y,t)}{\partial t}$$

и слѣдовательно система (3) въ предѣлѣ обращается въ систему слѣдующихъ двухъ уравненій:

$$\begin{aligned} &F(x,y,t)=0\\ &\frac{\partial F(x,y,t)}{\partial t}=0 \end{aligned} \qquad (4)$$

Рѣшая ихъ относительно X, Y, получимъ одну или нѣсколько системъ значеній этихъ перемѣнныхъ, т.е. найдемъ одну или нѣсколько точекъ, лежащихъ на кривой

$$F(x,y,t) = 0;$$

точки эти представляютъ изъ себя предѣльное положеніе точекъ пересѣченія данной кривой съ безконечно-близкой кривой семейства, и потому ихъ иногда называютъ п р е д ѣ л ь н ы-м и т о ч к а м и кривой семейства. На каждой изъ кривыхъ семейства, соотвѣтствующихъ различнымъ значеніямъ параметра t, лежатъ свои предѣльныя точки; геометрическое мѣсто этихъ точекъ есть нѣкоторая линія, которая называется о г и б а ю щ е й семейства. Координаты точекъ огибающей опредѣляются уравненіями (4), при чемъ t уже не имѣетъ какого-нибудь одного опредѣленнаго значенія, а остается произвольнымъ. Рѣшая уравненія (4) относительно X и У, получаемъ

$$x = \varphi(t),\quad y = \psi(t); \tag{5}$$

Эти два равенства могутъ быть разсматриваемы какъ уравненія огибающей, при чемъ t есть произвольный параметръ. Исключая t, получаемъ уравненіе

$$\Phi(x, y) = 0 \tag{6}$$

огибающей въ Декартовыхъ координатахъ. Къ тому же уравненію придемъ, исключая t непосредственно изъ двухъ уравненій системы (4).

Докажемъ, что о г и б а ю щ а я к а с а е т с я к а ж д о й и з ъ к р и в ы х ъ с е м е й с т в а в ъ ея предѣльныхъ точкахъ.

Разсмотримъ одну изъ кривыхъ семейства; она опредѣляется уравненіемъ (1), въ которомъ параметру t дано нѣкоторое опредѣленное значеніе. Огибающая опредѣляется двумя уравненіями (5) или равносильной системой (4), при чемъ предѣльныя точки, лежащія на данной кривой семейства, получаются при подстановкѣ вмѣсто t того самаго значенія, которое соотвѣтствуетъ данной кривой. Такъ какъ предѣльныя точки кривой семейства суть общія точки этой кривой и огибающей, то для доказательства нашего положенія достаточно показать, что въ каждой изъ этихъ точекъ касательныя къ кривой семейства и къ огибающей имѣютъ одно и то же направленіе (въ такомъ случаѣ обѣ касательныя необходимо совпадаютъ). Тангенсъ угла, образуемаго первой изъ этихъ касательныхъ съ осью X, равенъ производной $\frac{dy}{dx}$, получаемой дифференцированіемъ уравненія кривой семейства по X. Итакъ, дифференцируемъ уравненіе (1) по X, при чемъ t даемъ соотвѣтствующее постоянное значеніе. Въ результатѣ имѣемъ

$$\frac{\partial F}{\partial x} + \frac{\partial F}{\partial y} \cdot \frac{dy}{dx} = 0$$

откуда

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{\frac{\partial F}{\partial x}}{\frac{\partial F}{\partial y}} \qquad (7)$$

Тангенсъ угла, образованнаго съ осью X касательной къ огибающей, равенъ отношенію $\frac{y'}{x'}$, гдѣ черезъ x' и y' обозначены производныя по параметру t выраженій x и y, опредѣляемыхъ уравненіями (5) огибающей. Вмѣсто того, чтобы дифференцировать уравненія (5), можемъ дифференцировать по t равносильную систему (4), предполагая, что x и y суть неявныя функціи t, опредѣляемыя этой системой. Дифференцируя первое изъ уравненій (4), получаемъ:

$$\frac{\partial F}{\partial x} . x' + \frac{\partial F}{\partial y} y' + \frac{\partial F}{\partial t} = 0$$

или

$$\frac{\partial F}{\partial x} . x' + \frac{\partial F}{\partial y} y' = 0,$$

такъ какъ послѣдній членъ исчезаетъ въ силу второго изъ уравненій (4). Изъ полученнаго нами соотношенія находимъ

$$\frac{y'}{x'} = -\frac{\frac{\partial F}{\partial x}}{\frac{\partial F}{\partial y}} \qquad (8)$$

Сопоставляя это выраженіе съ равенствомъ (7), видимъ, что тангенсы угловъ, образуемыхъ съ осью X касательной къ кривой семейства и касательной къ огибающей, совершенно одинаково выражаются въ функціи координатъ x, y точки прикосновенія и параметра t; въ частности, если возьмемъ предѣльную точку кривой семейства, которая есть вмѣстѣ съ тѣмъ точка огибающей, то въ формулахъ (7) и (8) намъ придется вставить одни и тѣ же значенія x, y, t, и слѣдовательно будемъ имѣть въ такой точкѣ

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y'}{x'},$$

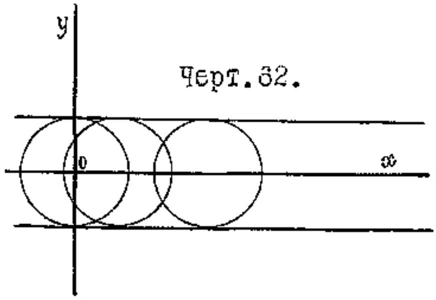
т.е. другими словами - положеніе наше доказано.

Мы видимъ такимъ образомъ, что огибающая касается всѣхъ кривыхъ семейства; она какъ бы о г и б а е т ъ всѣ эти кривыя (см. черт. 61). По этой причинѣ ее и называютъ огибающей, а кривыя семейства иногда называютъ о г и б а е м ы м и.

Черт. 61.

Разсмотримъ нѣсколько примѣровъ на опредѣленіе огибающей.

ПРИМѢРЪ I. Найти огибающую семейства круговъ: $(x-t)^2+y^2-R^2 = 0$.



Черт. 62.

Данное семейство состоитъ, очевидно, изъ круговъ радіуса R, имѣющихъ центры на оси X (см. черт. 62). Для опредѣленія огибающей присоединяемъ къ данному уравненію уравненіе $-2(x-t) = 0$, получаемое дифференцированіемъ по t, и исключаемъ изъ двухъ уравненій параметръ t. Изъ второго уравненія $t = x$, и слѣдовательно первое даетъ намъ

$$y^2 - R^2 = 0,$$

откуда

$$y = \pm R.$$

Огибающая состоитъ, такимъ образомъ, изъ пары прямыхъ, параллельныхъ оси X и отстоящихъ отъ нея на радіусъ R. Въ данномъ случаѣ непосредственно очевидно, что всѣ круги системы касаются этихъ двухъ прямыхъ.

ПРИМѢРЪ II. Найти огибающую касательныхъ кривой, опредѣляемой уравненіями

$$x = \varphi(t), \quad y = \psi(t) \qquad (9)$$

уравненіе касательной въ точкѣ данной кривой имѣетъ видъ

$$\frac{X - x}{x'} = \frac{Y - y}{y'}$$

или

$$(X - x)y' = (Y - y)x' \qquad (10)$$

гдѣ X, Y - текущія координаты, а x и y - координаты точки прикосновенія; такимъ образомъ, вмѣсто x и y мы должны вставить ихъ выраженія $\varphi(t)$, $\psi(t)$ изъ уравненій данной кривой. Мѣняя параметръ t, получаемъ цѣлое семейство прямыхъ линій - касательныхъ въ различныхъ точкахъ данной кривой. Для опредѣленія огибающей дифференцируемъ уравненіе (10) по параметру t, входящему въ x, y, x', y'; получаемъ

$$(X-x)y''-(Y-y)x''-x'y'+y'x'=0$$

или

$$(X-x)y''-(Y-y)x''=0 \tag{11}$$

Разсматривая уравненія (10) и (11) какъ два линейныхъ однородныхъ уравненія относительно неизвѣстныхъ X-x, Y-y, заключаемъ, что изъ этихъ уравненій слѣдуетъ или равенство нулю детерминанта

$$x'y'' - x''y',$$

или исчезновеніе неизвѣстныхъ X-x, Y-y. Первое предположеніе отпадаетъ, такъ какъ оно выполняется лишь для отдѣльныхъ точекъ данной кривой, а именно для точекъ перегиба; итакъ получаемъ

$$X-x = 0, \qquad Y-y = 0,$$

или, принимая во вниманіе уравненія (9):

$$X=\varphi(t), \quad Y=\psi(t) \tag{12}$$

Полученныя нами уравненія (12) опредѣляютъ огибающую; мы видимъ, что она совпадаетъ съ данной кривой. Итакъ, всякая кривая есть огибающая семейства своихъ касательныхъ, что, впрочемъ, очевидно и непосредственно.

ПРИМѢРЪ III. Опредѣлить огибающую семейства нормалей данной кривой.

Пусть кривая опредѣляется уравненіями

$$x=\varphi(t), \quad y=\psi(t) \tag{13}$$

Уравненіе нормали въ произвольной точкѣ кривой имѣетъ видъ

$$(X-x)x'+(Y-y)y'=0 \qquad (14)$$

гдѣ x и y слѣдуетъ замѣнить ихъ выраженіями въ функціи изъ уравненій (13). Измѣняя параметръ t, получаемъ семейство прямыхъ - нормалей данной кривой. Для опредѣленія огибающей семейства присоединяемъ къ уравненію (14) уравненіе

$$(X-x)x''+(Y-y)y''-x'^2-y'^2=0 \qquad (15)$$

получаемое дифференцированіемъ предыдущаго по параметру t. Рѣшая уравненія (14) и (15) относительно X, Y, получимъ уравненія огибающей. Но легко усмотрѣть, что уравненія (14) и (15) получаются изъ уравненій (4) и (5) параграфа 13-го простой замѣной α и β черезъ X и Y и значенія t_0 параметра черезъ t; слѣдовательно, огибающая нормалей есть геометрическое мѣсто центровъ кривизны, т.е. э в о л ю т а данной кривой. Отсюда непосредственно слѣдуетъ, что нормали кривой насаются эволюты. Точка прикосновенія нормали къ эволютѣ, т.е. центръ кривизны, есть предѣльная точка нормали; слѣдовательно можно сказать, что центръ кривизны есть предѣльное положеніе точки пересѣченія нормали, проведенной въ данной точкѣ, съ нормалью, проведенной въ безконечно--близкой точкѣ кривой. Короче - говорятъ, что центръ кривизны есть точка пересѣченія двухъ безконечно-близкихъ нормалей.

Возвращаясь къ общей теоріи, замѣтимъ, что семейство кривыхъ, зависящее отъ одного параметра, не всегда имѣетъ огибающую. Въ самомъ дѣлѣ, можетъ напримѣръ оказаться, что при опредѣленіи x и y изъ системы (4) параметръ t совершенно исключается, такъ что мы не получаемъ выраженій x и y вида (5), а получаемъ одну или нѣсколько системъ совершенно опредѣленныхъ численныхъ значеній x, y, т.е. вмѣсто линіи - огибающей - получаемъ одну или нѣсколько отдѣльныхъ точекъ. Такое обстоятельство имѣетъ всегда мѣсто, если уравненіе(1) семейства кривыхъ линейно относительно параметра t, т.е. имѣетъ видъ

$$\mathcal{U}(x,y)+t.\,\mathcal{V}(x,y)=0 \tag{16}$$

Дѣйствительно, дифференцируя это уравненіе по t, получаемъ $\mathcal{V}=0$, и слѣдовательно система (4) въ данномъ случаѣ даетъ намъ

$$\mathcal{U}(x,y)=0,\quad \mathcal{V}(x,y)=0 \tag{17}$$

два уравненія (17) опредѣляютъ одну или нѣсколько системъ значеній x, y - координатъ точекъ пересѣченія двухъ кривыхъ $\mathcal{U}=0$ и $\mathcal{V}=0$. Очевидно, черезъ эти точки проходятъ и всѣ кривыя даннаго семейства, которое такимъ образомъ представляетъ изъ себя п у ч о к ъ кривыхъ. Итакъ, пучокъ кривыхъ не имѣетъ огибающей; можно сказать, что огибающая пучка обращается въ отдѣльныя точки - центры пучка.

Возможны и другіе случаи, въ которыхъ семейство кривыхъ не имѣетъ огибающей. Такъ, если всѣ кривыя семейства имѣютъ особыя точки, то, при составленіи уравненія огибающей общими пріемами, геометрическое мѣсто этихъ особыхъ точекъ входитъ въ составъ огибающей, и можетъ случиться, что мы въ результатѣ только и получимъ это геометрическое мѣсто. Между тѣмъ легко видѣть, что геометрическое мѣсто особыхъ точекъ кривыхъ семейства не есть огибающая въ точномъ смыслѣ слова. Въ самомъ дѣлѣ, огибающая характеризуется тѣмъ, что касается всѣхъ огибаемыхъ, а въ данномъ случаѣ это свойство вообще не имѣетъ мѣста, такъ какъ доказательство, данное выше, перестаетъ быть примѣнимымъ; а именно для особой точки (x, y) кривой семейства (1) исчезаютъ одновременно производныя

$$\frac{\partial F}{\partial x} \quad \text{и} \quad \frac{\partial F}{\partial y}$$

и слѣдовательно выраженія (7) и (9), которыя входили въ наши разсужденія, становятся неопредѣленными.

_ _ * * * ○ * * * _ _

Г Л А В А II.

***************** *****************

ТЕОРІЯ ПРОСТРАНСТВЕННЫХЪ КРИВЫХЪ.

-----о-----

ВВЕДЕНІЕ.

Линія въ пространствѣ опредѣляется, какъ извѣстно изъ аналитической геометріи, двумя уравненіями

$$\mathcal{F}(x,y,z)=0, \qquad \Phi(x,y,z)=0 \qquad (1)$$

въ Декартовыхъ координатахъ. Каждое изъ этихъ уравненій въ отдѣльности опредѣляетъ поверхность, и двѣ поверхности, получаемыя такимъ образомъ, пересѣкаются по данной линіи. Въ частности можно провести черезъ данную линію двѣ цилиндрическія поверхности, образующія которыхъ параллельны соотвѣтственно оси Z и оси Y; въ такомъ случаѣ линія опредѣляется двумя уравненіями вида

$$y=f_1(x), \quad z=f_2(x) \qquad (2)$$

Можно получить эти уравненія, разрѣшая систему (1) относительно Y и Z. Отсюда между прочимъ заключаемъ, что если уравненія (1) не разрѣшимы относительно Y и Z, то данная линія не можетъ быть опредѣлена двумя уравненіями вида (2). Случай этотъ имѣетъ мѣсто, если при исключеніи изъ системы (1) одного изъ перемѣнныхъ Y,Z, само собою исключается и другое, такъ что система (1) приводится къ двумъ уравненіямъ вида

$$F(x,y,z) = 0, \qquad f(x) = 0$$

или къ равносильной системѣ

$$\psi(y,z) = 0, \qquad x = \text{const.}$$

Очевидно, данная линія въ этомъ случаѣ есть плоская кривая, лежащая въ плоскости $x = \text{const.}$, параллельной плоскости YZ. Возможно наконецъ, опредѣлить пространственную линію тремя уравненіями

$$x = \varphi(t), \; y = \psi(t), \; z = f(t) \tag{3}$$

выражая координаты X,Y,Z въ функціи произвольнаго параметра t. Исключая t изъ системы (3), придемъ очевидно къ двумъ уравненіямъ между Декартовыми координатами вида (1). Система (2) представляетъ изъ себя, очевидно, частный случай системы (3) и соотвѣтствуетъ частному предположенію $t = X$; дѣйствительно, два уравненія (2) вполнѣ равносильны тремъ уравненіямъ

$$x = t, \; y = f_1(t), \; z = f_2(t) \tag{4}$$

Мы будемъ преимущественно пользоваться третьей формой уравненій пространственной линіи, т.е. будемъ предполагать, что координаты x,y,z точекъ линіи выражены въ функціи произвольнаго параметра t. Замѣтимъ еще, что во всемъ послѣдующемъ мы будемъ предполагать, что система координатъ x,y,z прямоугольная, подобно тому какъ мы это предполагали и въ первой главѣ для плоскихъ кривыхъ.

Для того, чтобы геометрическое мѣсто точекъ, опредѣляемое уравненіями (3), соотвѣтствовало нашему обычному представленію о линіи, необходимо наложить нѣкоторыя ограниченія на функціи $\varphi(t)$, $\psi(t)$, $\chi(t)$, входящія въ уравненія (3). Не вдаваясь въ подробности, замѣтимъ лишь слѣдующее: функціи $\varphi(t)$, $\psi(t)$, $\chi(t)$ будемъ во всемъ дальнѣйшемъ предполагать непрерывными и дифференцируемыми, при чемъ для ближайшихъ нашихъ цѣлей достаточно допустить существованіе и непрерывность производныхъ этихъ функцій до производныхъ третьяго порядка включительно. Предполагая въ частности функціи $\varphi(t)$, $\psi(t)$, $\chi(t)$ - аналитическими, т.е. ограничиваясь аналитическими кривыми, можемъ функціи $\varphi(t)$, $\psi(t)$, $\chi(t)$ разложить въ ряды Тэйлора въ области произвольнаго значенія t_0 параметра t, за исключеніемъ лишь, можетъ быть, нѣкоторыхъ особыхъ значеній, которыя мы въ дальнѣйшемъ совсѣмъ не будемъ разсматривать. Итакъ, будемъ имѣть

$$\begin{aligned} x &= x_0 + a_1(t-t_0) + a_2(t-t_0)^2 + \cdots \\ y &= y_0 + b_1(t-t_0) + b_2(t-t_0)^2 + \cdots \\ z &= z_0 + c_1(t-t_0) + c_2(t-t_0)^2 + \cdots \end{aligned} \qquad (5)$$

если x_0, y_0, z_0 суть координаты точки кривой, соотвѣтствующей значенію параметра $t = t_0$.

Если координаты в с ѣ х ъ точекъ кривой, достаточно близкихъ къ точкѣ (x_0, y_0, z_0), получаются изъ о д н о й системы разложеній вида (5) и если три коэффиціента a_1, b_1, c_1 одновременно не равны нулю, т.е. разложенія (5) содержать члены 1-го порядка, то точка (x_0, y_0, z_0) называется обыкновенной точкой, въ противномъ случаѣ — особой. Такъ какъ коэффиціенты a_1, b_1, c_1 равны соотвѣтственно значеніямъ производныхъ x, y и z по t для $t = t_0$, то для обыкновенной точки аналитич. кривой по крайней мѣрѣ одна изъ трехъ производныхъ

$$x' = \frac{dx}{dt}, \qquad y' = \frac{dy}{dt}, \qquad z' = \frac{dz}{dt}$$

должна быть отлична отъ нуля. Мы будемъ во всемъ дальнѣйшемъ для любой кривой разсматривать только тѣ точки, для которыхъ это требованіе выполняется.

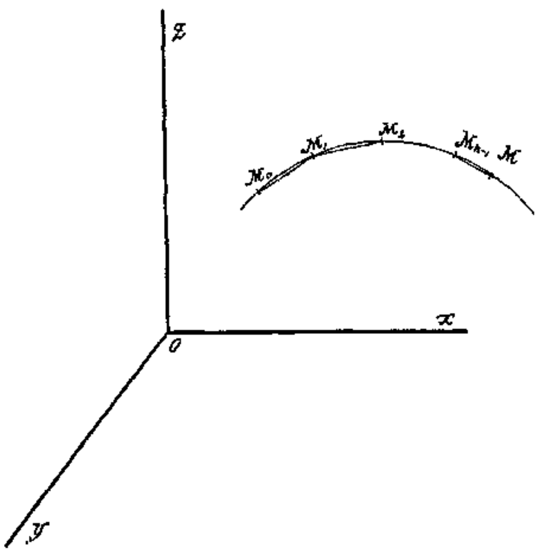
1. ДЛИНА КРИВОЙ; ДИФФЕРЕНЦІАЛЪ ДУГИ.

Длиной дуги пространственной кривой будемъ называть тотъ предѣлъ, къ которому стремится длина вписанной въ эту дугу ломаной, въ томъ предположеніи, что число звеньевъ ломаной возрастаетъ до безконечности, а длина каждаго звена безгранично убываетъ. Опредѣленіе, поставленное нами, является прямымъ обобщеніемъ соотвѣтствующаго опредѣленія для плоской кривой, и выкладки, которыя намъ придется произвести для доказательства существованія вышеупомянутаго предѣла, вполнѣ аналогичны соотвѣтствующимъ выкладкамъ для плоской кривой.

Допустимъ, что кривая опредѣляется тремя уравненіями

$$x = \varphi(t), \quad y = \psi(t), \quad z = \chi(t) \qquad (1)$$

и разсмотримъ на ней двѣ точки: точку M_0, соотвѣтствующую значенію параметра $t = t_0$ (см. черт.1), и точку M, соотвѣтствующую значенію $t = T$. Предположимъ, что при измѣненіи параметра t отъ t_0 до T *) точка (x,y,z) перемѣщается по кривой отъ M_0 до M, не мѣняя направленія движенія; замѣтимъ, что это требованіе всегда выполняется, если точки M_0 и M взяты достаточно близко одна отъ другой. Дадимъ параметру t рядъ значеній t_1, t_2, t_3, ...t_{n-1}, заключающихся между t_0 и T. Этимъ значеніямъ соотвѣтствуетъ рядъ точекъ M_1, M_2, M_3,...M_{n-1}, заключающихся между M_0 и M. Для симметріи будемъ обозначать T черезъ t_n и точку M черезъ M_n. Соединяя послѣдовательно M_0 съ M_1, M_1 съ M_2 и такъ далѣе, наконецъ M_{n-1} съ M_n, получаемъ вписанную въ дугу M_0M ломаную, длину которой обозначимъ черезъ L. Называя координаты точки M_i черезъ x_i, y_i, z_i, имѣемъ:



Черт.1.

---

*) *Для опредѣленности будемъ предполагать* $T > t_0$.

$$x_i = \varphi(t_i),\ y_i = \psi(t_i),\ z = \chi(t_i) \qquad (2)$$

По извѣстной формулѣ аналитической геометріи, длина звена ломаной $M_i M_{i+1}$ выражается слѣдующимъ образомъ:

$$\overline{M_i M_{i+1}} = \sqrt{(x_{i+1} - x_i)^2 + (y_{i+1} - y_i)^2 + (z_{i+1} - z_i)^2}.$$

Отсюда заключаемъ, что длина всей ломаной

$$\mathcal{L} = \sum_{i=0}^{i=n-1} \sqrt{(x_{i+1} - x_i)^2 + (y_{i+1} - y_i)^2 + (z_{i+1} - z_i)^2} \qquad (3)$$

Въ силу равенствъ (2)

$$x_{i+1} - x_i = \varphi(t_{i+1}) - \varphi(t_i)$$

или, по теоремѣ о конечномъ приращеніи функціи

$$x_{i+1} - x_i = (t_{i+1} - t_i)\,\varphi'(\tau_i) \qquad (4)$$

гдѣ τ_i есть нѣкоторое среднее значеніе параметра, т.е.

$$t_i \leqq \tau_i \leqq t_{i+1}$$

Аналогично получаемъ

$$y_{i+1} - y_i = (t_{i+1} - t_i)\,\psi'(\theta_i) \qquad (5)$$

$$z_{i+1} - z = (t_{i+1} \ t_i)\,\chi'(\vartheta_i) \qquad (6)$$

гдѣ $$t_i \leqq \theta_i \leqq t_{i+1} \quad \text{и} \quad t_i \leqq \vartheta_i \leqq t_{i+1}$$

Равенство (3), въ силу формулъ (4), (5) и (6), принимаетъ видъ

$$\mathcal{L} = \sum_{i=0}^{i=n-1} \sqrt{\varphi'^2(\tau_i) + \psi'^2(\theta_i) + \chi'^2(\vartheta_i)}\,.(t_{i+1} - t_i) \qquad (7)$$

Полагая

$$\sqrt{\varphi'^2(\tau_i) + \psi'^2(\theta_i) + \chi'^2(\vartheta_i)} - \sqrt{\varphi'^2(t_i) + \psi'^2(t_i) + \chi'^2(t_i)} = \varepsilon_i \qquad (8)$$

имѣемъ:

$$\mathcal{L} = \sum_{i=0}^{i=n-1} (t_{i+1} - t_i)\sqrt{\varphi'^2(t_i) + \psi'^2(t_i) + \chi'^2(t_i)} + \sum_{i=0}^{i=n-1} (t_{i+1} - t_i)\varepsilon_i \qquad (9)$$

Будемъ увеличивать число промежуточныхъ значеній параметра такъ, чтобы разность каждыхъ двухъ смежныхъ значеній $t_{i+1}-t_i$ стремилась къ нулю. При этомъ увеличивается число звеньевъ ломаной линіи и длина каждаго звена стремится къ нулю, какъ это явствуетъ изъ выраженія длины $M_i M_{i+1}$, даннаго выше. Докажемъ, что при этомъ сумма

$$\sum_{i=0}^{i=n-1}(t_{i+1}-t_i)\mathcal{E}_i \tag{10}$$

стремится къ нулю. Для этого лѣвую часть равенства (8) умножимъ и раздѣлимъ на сумму входящихъ въ него квадратныхъ корней; въ результатѣ получимъ:

$$\mathcal{E}_i=\frac{\varphi'^2(\tau_i)+\psi'^2(\theta_i)+\chi'^2(\vartheta_i)-\varphi'^2(t_i)-\psi'^2(t_i)-\chi'^2(t_i)}{\sqrt{\varphi'^2(\tau_i)+\psi'^2(\theta_i)+\chi'^2(\vartheta_i)}+\sqrt{\varphi'^2(t_i)+\psi'^2(t_i)-\chi'^2(t_i)}}=$$

$$=[\varphi'(\tau_i)-\varphi'(t_i)]\cdot\frac{\varphi'(\tau_i)+\varphi'(t_i)}{R+R'}+[\psi'(\theta_i)-\psi'(t_i)]\cdot\frac{\psi'(\theta_i)+\psi'(t_i)}{R+R'}+$$

$$+[\chi'(\vartheta_i)-\chi'(t_i)]\cdot\frac{\chi'(\vartheta_i)+\chi'(t_i)}{R+R'}, \tag{11}$$

гдѣ для сокращенія положено:

$$\sqrt{\varphi'^2(\tau_i)+\psi'^2(\theta_i)+\chi'^2(\vartheta_i)}=R$$

$$\sqrt{\varphi'^2(t_i)+\psi'^2(t_i)+\chi'^2(t_i)}=R'.$$

Подкоренное выраженіе въ радикалѣ R, какъ сумма трехъ квадратовъ, болѣе каждаго изъ квадратовъ, и слѣдовательно

$$\sqrt{\varphi'^2(\tau_i)+\psi'^2(\theta_i)+\chi'^2(\vartheta_i)}>\left|\varphi'(\tau_i)\right|$$

По той же причинѣ

$$\sqrt{\varphi'^2(t_i)+\psi'^2(t_i)+\chi'^2(t_i)}>\left|\varphi'(t_i)\right|$$

и слѣдовательно

$$\left|\varphi'(\tau_i)+\varphi'(t_i)\right| < \sqrt{\varphi'^2(\tau_i)+\psi'^2(\theta_i)+\chi'^2(\vartheta_i)} + \sqrt{\varphi'^2(t_i)+\psi'^2(t_i)+\chi'^2(t_i)}$$

или

$$\left|\frac{\varphi'(\tau_i) + \varphi'(t_i)}{R + R'}\right| < 1.$$

Аналогично убѣждаемся, что и остальныя двѣ дроби

$$\frac{\psi'(\theta_i) + \psi'(t_i)}{R + R'}, \qquad \frac{\chi'(\vartheta_i) + \chi'(t_i)}{R + R'},$$

входящія въ выраженіе (11), по абсолютной величинѣ менѣе единицы, а отсюда слѣдуетъ, что абсолютная величина $_i$ менѣе суммы абсолютныхъ величинъ трехъ разностей, которыя входятъ множителями при упомянутыхъ дробяхъ, т.е.

$$\left|\mathcal{E}_i\right| < \left|\varphi'(\tau_i)-\varphi'(t_i)\right| + \left|\psi'(\theta_i)-\psi'(t_i)\right| + \left|\chi'(\vartheta_i)-\chi'(t_i)\right| \qquad (12)$$

мы предполагаемъ, что производныя $\varphi'(t)$, $\psi'(t)$, $\chi'(t)$ суть функціи непрерывныя; слѣдовательно (ср. гл.I, § 1) мы всегда можемъ, вводя достаточное число промежуточныхъ значеній t_1, t_2, t_3..... t_{n-1}, разбить промежутокъ отъ t_0 до T на столь малые частные промежутки $t_0 t_1$, $t_1 t_2$, $t_2 t_3$,..., чтобы имѣли мѣсто неравенства

$$\begin{aligned} &\left|\varphi'(\tau_i)-\varphi'(t_i)\right| < \frac{\mathcal{E}}{3} \\ &\left|\psi'(\theta_i)-\psi'(t_i)\right| < \frac{\mathcal{E}}{3} \qquad (13) \\ &\left|\chi'(\vartheta_i)-\chi'(t_i)\right| < \frac{\mathcal{E}}{3} \end{aligned}$$

гдѣ $\mathcal{E}$ - произвольно заданное, сколь угодно малое число. Сопоставляя неравенства (12) и (13), получаемъ:

$$\left|\mathcal{E}_i\right| < \frac{\mathcal{E}}{3} + \frac{\mathcal{E}}{3} + \frac{\mathcal{E}}{3} = \mathcal{E}$$

а слѣдовательно, возвращаясь къ суммѣ (10), имѣемъ:

$$\left|\sum_{i=0}^{i=n-1}(t_{i+1}-t_i)\mathcal{E}_i\right| \leq \sum_{i=0}^{i=n-1}(t_{i+1}-t_i)\left|\mathcal{E}_i\right| <$$

$$< \sum_{i=0}^{i=n-1}(t_{i+1}-t_i)\mathcal{E} = \mathcal{E}(t_1-t_0+t_2-t_1+\dots+T-t_{n-1}) = \mathcal{E}(T-t_0) \quad (14)$$

Неравенство (14) показываетъ, что, увеличивая число промежуточныхъ значенiй t_1, t_2 ..... t_{n-1}, можно сдѣлать сумму (10) сколь угодно малою по абсолютной величинѣ, такъ какъ $\mathcal{E}$ находится въ нашемъ произволѣ, а разность $T - t_0$ имѣетъ опредѣленное конечное значенiе. Такимъ образомъ, переходя къ предѣлу, въ предположенiи, что число промежуточныхъ значенiй возрастаетъ до безконечности, а разности каждыхъ двухъ смежныхъ значенiй стремятся къ нулю, имѣемъ:

$$\lim \sum_{i=0}^{i=n-1}(t_{i+1}-t_i)\mathcal{E}_i = 0 \quad (15)$$

Въ томъ же самомъ предположенiи первый членъ второй части равенства (9) стремится къ опредѣленному предѣлу, не зависящему отъ закона, по которому вводимъ промежуточныя значенiя, и предѣлъ этотъ есть не что иное какъ опредѣленный интегралъ (ср. гл.I, § 1)

$$\int_{t_0}^{T}\sqrt{\varphi'^2(t) + \psi'^2(t) + \chi'^2(t)}\,dt.$$

Такимъ образомъ мы доказали, что длина L вписанной ломаной стремится къ опредѣленному предѣлу, который и принимаемъ за мѣру длины дуги M_0M. Обозначая эту длину через s, имѣемъ:

$$s = \lim L = \lim \sum_{i=0}^{i=n-1} \sqrt{\varphi'^2(t_i) + \psi'^2(t_i) + \chi'^2(t_i)}\,.(t_{i+1} - t_i) =$$
$$= \int_{t_0}^{T} \sqrt{\varphi'^2(t) + \psi'^2(t) + \chi'^2(t)}\,.\,dt \qquad (16)$$

Предположимъ, что начало дуги M_0 остается неизмѣннымъ, а конецъ ея M перемѣщается по данной кривой. Въ такомъ случаѣ t_0 остается постояннымъ, а T измѣняется, и мы для удобства будемъ значеніе параметра, соотвѣтствующаго концу дуги M, обозначать уже не через T, а через t. При измѣненіи t измѣняется и длина s дуги M_0M; такимъ образомъ s есть нѣкоторая функція $s(t)$ значенія параметра t, соотвѣтствующаго концу дуги, и производная этой функціи по t опредѣляется равенствомъ:

$$\frac{ds}{dt} = \sqrt{\varphi'^2(t) + \psi'^2(t) + \chi'^2(t)} \qquad (17)$$

Въ силу уравненій (1) кривой имѣемъ:

$$\varphi'(t) = \frac{dx}{dt} = x', \qquad \psi'(t) = \frac{dy}{dt} = y', \qquad \chi'(t) = \frac{dz}{dt} = z',$$

и слѣдовательно равенство (17) можемъ представить въ слѣдующемъ видѣ:

$$\frac{ds}{dt} = \sqrt{x'^2 + y'^2 + z'^2} \qquad (18)$$

Умножая обѣ части на dt, получаемъ дифференціалъ дуги кривой:

$$ds = \sqrt{x'^2 + y'^2 + z'^2}\,.\,dt \qquad (19)$$

Равенства (18) и (19) содержатъ квадратный радикалъ, передъ которымъ возможно подразумѣвать знакъ + или –. Выборъ того или другого изъ этихъ знаковъ соотвѣтствуетъ выбору положительнаго направленія для отсчета дугъ на данной кривой. Будемъ подразумѣвать передъ радикаломъ знакъ +, согласно съ тѣмъ, какъ понимали этотъ радикалъ во всѣхъ предшествующихъ выкладкахъ. Въ такомъ случаѣ изъ равенства (19) слѣдуетъ, что знакъ ds совпадаетъ со знакомъ dt и потому s возрастаетъ съ возрастаніемъ t. Отсюда явствуетъ, что мы выбрали за положительное направленіе отсчета дугъ то направленіе на кривой, которое соотвѣтствуетъ в о з р а с т а н і ю параметра t. Предполагая въ частности t = x, т.е. опредѣляя кривую двумя уравненіями

$$y = f_1(x), \quad z = f_2(x) \tag{20}$$

получаемъ изъ равенства (21):

$$ds = \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dx}\right)^2} \cdot dx \tag{21}$$

Если передъ радикаломъ подразумѣваемъ знакъ +, то за положительное направленіе на кривой принимаемъ направленіе движенія точки, проекція которой на ось X движется въ сторону возрастающихъ X-овъ.

Возводя обѣ части равенства (19) въ квадратъ и замѣняя произведенія производныхъ x', y', z' на дифференціалъ dt дифференціалами dx, dy, dz, имѣемъ:

$$ds^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2 \tag{22}$$

Извлекая изъ двухъ частей корень квадратный, получаемъ

$$ds = \pm\sqrt{dx^2 + dy^2 + dz^2} \tag{23}$$

при чемъ однако выборъ того или иного знака передъ радикаломъ здѣсь не можетъ быть выполненъ подобно тому, какъ мы это сдѣлали для равенства (19).

Длина дуги $M_0M = s$ есть нѣкоторая функція значенія параметра t, соотвѣтствующаго точкѣ M, какъ объ этомъ было упомянуто выше. Такимъ образомъ имѣемъ:

$$s = s(t) \tag{24}$$

Рѣшая это равенство относительно t, получаемъ

$$t = f(s) \tag{25}$$

и слѣдовательно, внося это выраженіе въ уравненія (1),

$$x = \varphi_1(s), \quad y = \psi_1(s), \quad z = \chi_1(s) \tag{26}$$

Такимъ образомъ координаты произвольной точки M на данной кривой выражаются въ функціи дуги M_0M, отсчитываемой отъ нѣкоторой опредѣленной точки M_0, принятой за начало дугъ. Равенства (26) представляютъ изъ себя частный случай уравненій (1); они получаются, если произвольный параметръ t равенъ въ частности дугѣ s. Итакъ, можемъ разсматривать равенства (26) какъ уравненія кривой, при чемъ дуга s играетъ роль произвольнаго параметра. Обозначая акцентами дифференцированіе по s, получаемъ изъ общей формулы (18)

$$1 = \sqrt{x'^2 + y'^2 + z'^2},$$

откуда

$$x'^2 + y'^2 + z'^2 = 1 \tag{27}$$

Дифференцируя полученное равенство по s и дѣля на 2, имѣемъ кромѣ того:

$$x'x'' + y'y'' + z'z'' = 0 \tag{28}$$

Равенства (27) и (28) имѣютъ мѣсто только въ томъ случаѣ, если параметръ $t = s$.

Предыдущія разсужденія становятся непримѣнимыми, если функція $s(t)$, входящая въ равенство (24), обращается въ постоянное. Въ такомъ случаѣ производная $\frac{ds}{dt}$ должна тождественно равняться нулю, откуда, въ силу равенства (18), слѣдуетъ, что во всѣхъ точкахъ кривой должно имѣть мѣсто равенство

$$x'^2 + y'^2 + z'^2 = 0 \tag{29}$$

или, по умноженіи на dt^2:

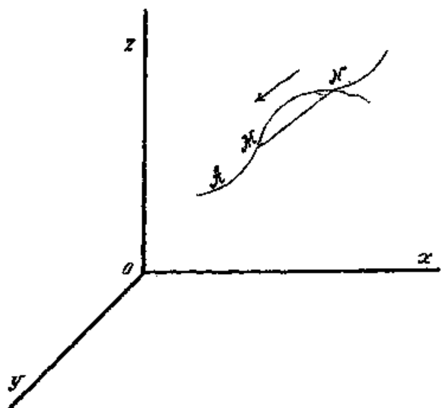
$$dx^2 + dy^2 + dz^2 = 0 \tag{30}$$

Очевидно возможны лишь мнимыя линіи, удовлетворяющія условію (29) или (30); ихъ называютъ минимальными линіями. Обращаясь къ формулѣ (16), легко усмотримъ, что длина дуги минимальной линіи тождественно равна нулю, какъ бы мы ни выбирали начало M_0 и конецъ M дуги.

Во всемъ дальнѣйшемъ мы будемъ всегда устранять изъ разсмотрѣнія минимальныя кривыя; это тѣмъ болѣе естественно, что мы вообще будемъ изучать лишь дѣйствительныя кривыя, а минимальныя линіи, какъ мы видѣли, необходимо - мнимыя. При такомъ ограниченіи мы всегда можемъ предполагать, что дуга кривой выбрана за произвольный параметръ и что слѣдовательно кривая опредѣляется тремя уравненіями вида (26), при чемъ выполняются соотношенія (27) и (28).

2. ПРЕДѢЛЪ ОТНОШЕНІЯ ДУГИ КЪ ХОРДѢ

Разсмотримъ на кривой двѣ точки M и N (черт.2) и соединимъ ихъ прямой линіей MN. Отношеніе дуги кривой $\breve{MN}$ къ хордѣ $\overline{MN}$ будетъ измѣняться, если точка N будетъ перемѣщаться по данной кривой. Предположимъ, что точка N неограниченно приближается къ M, совпадая съ нею въ предѣлѣ, и докажемъ теорему:



Черт.2.

Предѣлъ отношенія дуги къ хордѣ равенъ единицѣ.

Предположимъ, что данная кривая опредѣляется уравненіями:

$$x = \varphi(t), \quad y = \psi(t), \quad z = \chi(t) \tag{1}$$

и пусть точка M соотвѣтствуетъ значенію параметра t, а точка N - значенію $t + \Delta t$. Координаты точки M обозначимъ черезъ x, y, z, координаты точки N - черезъ $x + \Delta x$, $y + \Delta y$, $z + \Delta z$. Длину дуги $\breve{AM}$, отсчитываемой отъ начала дугъ A, обозначимъ черезъ s, длину дуги AN - черезъ $s + \Delta s$; въ такомъ случаѣ дуга $\breve{MN}$ равна Δs. Длина хорды $\overline{MN}$, какъ разстояніе между точками M и N, по формулѣ аналитической геометріи равна

$$\sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2 + \Delta z^2},$$

и слѣдовательно отношеніе дуги къ хордѣ

$$\frac{\breve{MN}}{\overline{MN}} = \frac{\Delta s}{\sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2 + \Delta z^2}}$$

или, по раздѣленіи числителя и знаменателя на Δt

$$\frac{\breve{MN}}{\overline{MN}} = \frac{\frac{\Delta s}{\Delta t}}{\sqrt{\left(\frac{\Delta x}{\Delta t}\right)^2+\left(\frac{\Delta y}{\Delta t}\right)^2+\left(\frac{\Delta z}{\Delta t}\right)^2}} \tag{2}$$

Замѣчая, что Δx, Δy, Δz суть приращенія функцій x, y, z, s, соотвѣтствующія приращенію Δt независимаго перемѣннаго, и переходя къ предѣлу для $\Delta t = 0$, получаемъ:

$$\lim \frac{\breve{MN}}{\overline{MN}} = \frac{\frac{ds}{dt}}{\sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2+\left(\frac{dy}{dt}\right)^2+\left(\frac{dz}{dt}\right)^2}}. \tag{3}$$

Но производная дуги s по параметру t, на основаніи формулы (18) параграфа 1-го, равна радикалу, находящемуся въ знаменателѣ; слѣдовательно

$$\lim \frac{\breve{MN}}{\overline{MN}} = 1 \tag{4}$$

т.е. теорема наша доказана. Очевидно предѣлъ обратнаго отношенія тоже равенъ единицѣ, т.е.

$$\lim \frac{\overline{MN}}{\breve{MN}} = 1 \tag{5}$$

Теорема, доказанная нами, справедлива, конечно, между прочимъ и для плоскихъ кривыхъ, которыя представляютъ лишь частный случай пространственныхъ кривыхъ.

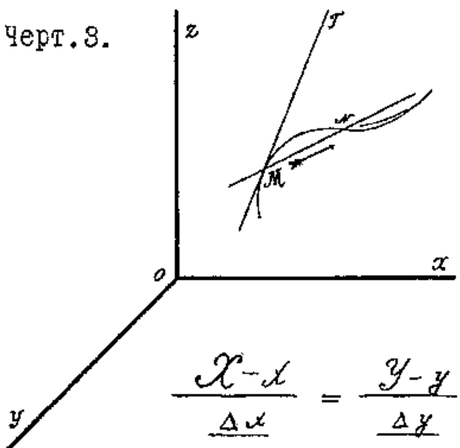
3. КАСАТЕЛЬНАЯ ПРЯМАЯ, КАСАТЕЛЬНЫЯ ПЛОСКОСТИ.

Предполагая, что кривая опредѣляется уравненіями метра t, и точку N, соотвѣтствующую значенію t + Δ t. Обозначая соотвѣтственно черезъ x, y, z и $x+\Delta x$, $y+\Delta y$, $z+\Delta z$ координаты этихъ точекъ, пишемъ уравненія сѣкущей MN въ видѣ

$$\frac{X-x}{\Delta x}=\frac{Y-y}{\Delta y}=\frac{Z-z}{\Delta z}, \qquad (2)$$

какъ уравненія прямой, проходящей черезъ двѣ точки. При этомъ черезъ X, Y, Z обозначаемъ текущія координаты точки сѣкущей. Раздѣливъ знаменатели трехъ дробей (2) на Δ t, получаемъ тѣ же уравненія въ эквивалентной формѣ:

Черт. 8.



$$\frac{X-x}{\frac{\Delta x}{\Delta t}}=\frac{Y-y}{\frac{\Delta y}{\Delta t}}=\frac{Z-z}{\frac{\Delta z}{\Delta t}} \qquad (3)$$

Предположимъ теперь, что Δ t убываетъ по абсолютной величинѣ, стремясь къ нулю Переходя къ предѣлу для Δ t =0, получаемъ изъ уравненій (3)

$$\frac{X-x}{x'}=\frac{Y-y}{y'}=\frac{Z-z}{z'} \qquad (4)$$

гдѣ черезъ x', y', z' обозначены, какъ всегда, производныя x, y, z, опредѣляемыхъ уравненіями (1), по параметру t. Уравненія (4) суть уравненія вполнѣ опредѣленной прямой, называемой **касательной** въ точкѣ M данной кривой; точка M называется **точкой прикосновенія**. По самому способу полученія уравненій (4) видно, что касатель ная можетъ быть разсматриваема какъ предѣльное положеніе сѣкущей, получаемое при неограниченномъ приближеніи второй точки пересѣченія N къ первой точкѣ M (черт.3). Замѣтимъ, что уравненія (4) перестаютъ быть уравненіями опредѣленной прямой, если въ точкѣ M одновременно исчезаютъ три производныхъ x', y', z', но подобный случай не можетъ имѣть мѣста для обыкновенной точки кривой (см. введеніе).

Обозначимъ косинусы угловъ, образуемыхъ касательной съ осями координатъ, черезъ α, β, γ. Въ такомъ случаѣ изъ уравненій (4) имѣемъ

$$\alpha : \beta : \gamma = x' : y' : z' \tag{5}$$

и слѣдовательно

$$\alpha = \frac{x'}{\sqrt{x'^2+y'^2+z'^2}}, \quad \beta = \frac{y'}{\sqrt{x'^2+y'^2+z'^2}}, \quad \gamma = \frac{z'}{\sqrt{x'^2+y'^2+z'^2}} \tag{6}$$

такъ какъ сумма квадратовъ трехъ косинусовъ $\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2$ должна равняться единицѣ. Выраженія (6) содержатъ квадратный корень, передъ которымъ можно подразумѣвать знакъ + или - . Выборъ того или другого изъ этихъ знаковъ соотвѣтствуетъ установленію положительнаго направленія на касательной, что очевидно можетъ быть сдѣлано двумя различными способами. Будемъ всегда подразумѣвать передъ радикаломъ $\sqrt{x'^2 + y'^2 + z'^2}$ знакъ +, подобно тому, какъ это было установлено въ § 1. Въ такомъ случаѣ за положительное направленіе на касательной мы выбираемъ то направленіе, которое совпадаетъ съ положительнымъ направленіемъ кривой въ смежности съ точкой прикосновенія. Въ самомъ дѣлѣ, косинусы α, β, γ суть, очевидно, предѣлы, къ которымъ стремятся выраженія

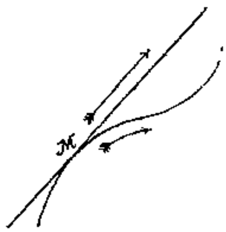
$$\frac{\frac{\Delta x}{\Delta t}}{+\sqrt{\left[\frac{\Delta x}{\Delta t}\right]^2+\left[\frac{\Delta y}{\Delta t}\right]^2+\left[\frac{\Delta z}{\Delta t}\right]^2}},\quad \frac{\frac{\Delta y}{\Delta t}}{\sqrt{\left[\frac{\Delta x}{\Delta t}\right]^2+\left[\frac{\Delta y}{\Delta t}\right]^2+\left[\frac{\Delta z}{\Delta t}\right]^2}},\quad \frac{\frac{\Delta z}{\Delta t}}{\sqrt{\left[\frac{\Delta x}{\Delta t}\right]^2+\left[\frac{\Delta y}{\Delta t}\right]^2+\left[\frac{\Delta z}{\Delta t}\right]^2}} \tag{7}$$

для $\Delta t = 0$. Съ другой стороны, обращаясь къ уравненіямъ (2) сѣкущей, видимъ, что косинусы угловъ, образуемыхъ этой линіей съ осями, равны

$$\frac{\Delta x}{+\sqrt{\Delta x^2+\Delta y^2+\Delta z^2}},\quad \frac{\Delta y}{\sqrt{\Delta x^2+\Delta y^2+\Delta z^2}},\quad \frac{\Delta z}{\sqrt{\Delta x^2+\Delta y^2+\Delta z^2}}, \tag{8}$$

Притомъ знаки этихъ трехъ косинусовъ совпадаютъ со знаками приращеній Δx, Δy, Δz, которыя суть проекціи отрѣзка MN (черт.3) на оси координатъ, и слѣдовательно за положительное направленіе сѣкущей мы считаемъ направленіе отъ M къ N. Выраженія (7) и (8) совпадаютъ по абсолютной величинѣ; они совпадаютъ и по знаку, если приращеніе Δt положительно, т.е. если точка N, по отношенію къ точкѣ M, лежитъ въ сторону возрастанія параметра t; наоборотъ, знаки выраженій (8) противоположны знакамъ выраженій (7), если точка N лежитъ по отношенію къ точкѣ M въ сторону убыванія t. Отсюда слѣдуетъ, что выраженія (7) суть косинусы угловъ, образуемыхъ съ осями координатъ тѣмъ направленіемъ сѣкущей, которое соотвѣтствуетъ направленію возрастанія параметра t на кривой линіи; а такъ какъ α, β, γ равны предѣламъ трехъ выраженій (7) для $\Delta t = 0$, то положительное направленіе на касательной совпадаетъ съ положительнымъ направленіемъ на кривой въ смежности съ точкой прикосновенія

Черт.4.



(см. черт.4). Въ частномъ случаѣ, когда параметръ t равенъ дугѣ s кривой, имѣемъ $x'^2 + y'^2 + z'^2 = 1$ (см.§1), и формулы (6) принимаютъ болѣе простой видъ:

$$\alpha = x', \beta = y', \gamma = z' \qquad (9)$$

Умножая числителя и знаменатели выраженій (6) на dt и принимая во вниманіе формулу (19) параграфа 1-го, мы и въ самомъ общемъ случаѣ можемъ написать:

$$\alpha = \frac{dx}{ds}, \quad \beta = \frac{dy}{ds}, \quad \gamma = \frac{dz}{ds}, \qquad (10)$$

но здѣсь мы должны понимать правыя части какъ отношенія дифференціаловъ x, y, z и s при независимомъ перемѣнномъ t.

Если данная кривая опредѣляется двумя уравненіями

$$F(x,y,z)=0 \qquad \Phi(x,y,z)=0 \qquad (11)$$

въ Декартовыхъ координатахъ, то мы всегда можемъ предположить, что эта же кривая опредѣляется тремя уравненіями вида (1); въ самомъ дѣлѣ, полагая, напримѣръ, $x = \varphi(t)$, гдѣ $\varphi(t)$ - произвольная функція, и разрѣшая уравненія (11) относительно y и z, получимъ и для этихъ двухъ координатъ опредѣленныя выраженія въ функціи параметра t. Вставляя выраженія x, y, z въ уравненія (11), обратимъ ихъ въ тождества, которыя можемъ дифференцировать по t; въ результатѣ получаемъ:

$$\begin{aligned} \frac{\partial F}{\partial x} x' + \frac{\partial F}{\partial y} y' + \frac{\partial F}{\partial z} z' &= 0 \\ \frac{\partial \Phi}{\partial x} x' + \frac{\partial \Phi}{\partial y} y' + \frac{\partial \Phi}{\partial z} z' &= 0 \end{aligned} \qquad (12)$$

Изъ уравненій (12) слѣдуетъ, что x', y', z' пропорціональны детерминантамъ второго порядка, составленнымъ изъ частныхъ производныхъ функцій $\mathcal{F}$ и Φ по x, y, z. Замѣняя въ уравненіяхъ (4) знаменатели x', y', z' пропорціональными имъ детерминантами, получаемъ уравненія касательной въ слѣдующемъ видѣ:

$$\frac{X-x}{\frac{\partial(\mathcal{F},\Phi)}{\partial(y,z)}} = \frac{Y-y}{\frac{\partial(\mathcal{F},\Phi)}{\partial(z,x)}} = \frac{Z-z}{\frac{\partial(\mathcal{F},\Phi)}{\partial(x,y)}} \qquad (13)$$

гдѣ для сокращенія положено

$$\frac{\partial(\mathcal{F},\Phi)}{\partial(y,z)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial\mathcal{F}}{\partial y} & \frac{\partial\mathcal{F}}{\partial z} \\ \frac{\partial\Phi}{\partial y} & \frac{\partial\Phi}{\partial z} \end{vmatrix} = \frac{\partial\mathcal{F}}{\partial y}\cdot\frac{\partial\Phi}{\partial z} - \frac{\partial\mathcal{F}}{\partial z}\cdot\frac{\partial\Phi}{\partial y}$$

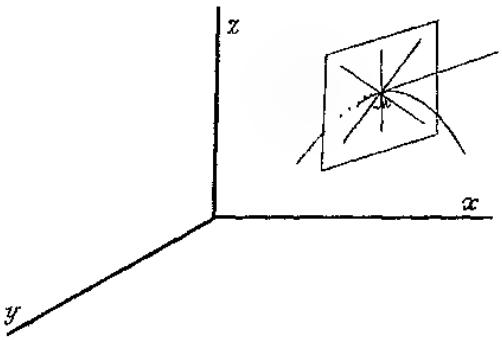
и аналогично для остальныхъ двухъ знаменателей.

Въ заключеніе замѣтимъ, что всякая плоскость, проходящая черезъ касательную къ данной кривой въ точкѣ M, называется **касательной плоскостью**. Очевидно въ каждой точкѣ кривой существуетъ цѣлый пучокъ касательныхъ плоскостей.

4. НОРМАЛЬНАЯ ПЛОСКОСТЬ; НОРМАЛИ.

Прямая, проходящая черезъ точку кривой перпендикулярно къ касательной въ этой точкѣ, называется **нормалью**. Очевидно въ каждой точкѣ M кривой возможно провести безчисленное множество нормалей (см. черт.5); всѣ эти нормали, образуя пучокъ прямыхъ, лежатъ въ одной плоскости, перпендику-

Черт.5.



лярной къ касательной и проходящей черезъ точку прикосновенія; плоскость эта называется нормальной плоскостью.

Уравненіе этой плоскости легко найдемъ какъ уравненіе плоскости, проходящей черезъ точку M съ координатами x, y, z и перпендикулярной къ прямой, которая, при сохраненіи всѣхъ обозначеній предшествующаго параграфа, опредѣляется уравненіями:

$$\frac{X-x}{x'} = \frac{Y-y}{y'} = \frac{Z-z}{z'} \qquad (1)$$

Обозначая черезъ X, Y, Z текущія координаты точки на нормальной плоскости, непосредственно получаемъ уравненіе этой плоскости въ слѣдующемъ видѣ:

$$(X-x).x'+(Y-y).y'+(Z-z)z'=0 \qquad (2)$$

Замѣняя производныя x', y', z' пропорціональными имъ косинусами α, β, γ угловъ касательной съ осями (§ 3), можемъ написать уравненіе нормальной плоскости еще въ слѣдующемъ видѣ:

$$\alpha.(X-x)+\beta(Y-y)+\gamma(Z-z)=0 \qquad (3)$$

Наконецъ, предполагая, что кривая опредѣляется двумя уравненіями

$$F(x,y,z) = 0, \quad \Phi(x,y,z) = 0$$

въ Декартовыхъ координатахъ и принимая во вниманіе, что касательная въ этомъ случаѣ опредѣляется уравненіями (13) предшествующаго параграфа, можемъ представить уравненіе нормальной плоскости въ слѣдующемъ видѣ:

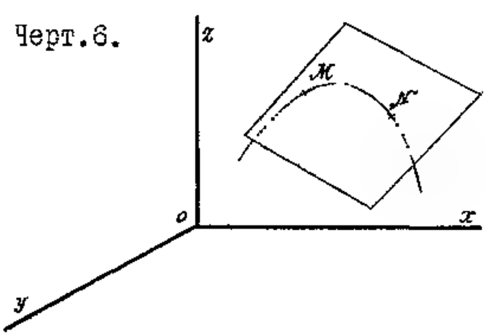
$$\begin{vmatrix} X-x, & Y-y, & Z-z \\ \frac{\partial F}{\partial x} & \frac{\partial F}{\partial y} & \frac{\partial F}{\partial z} \\ \frac{\partial \Phi}{\partial x} & \frac{\partial \Phi}{\partial y} & \frac{\partial \Phi}{\partial z} \end{vmatrix} = 0 \qquad (4)$$

Въ самомъ дѣлѣ, разлагая опредѣлитель по элементамъ 1-й строки, видимъ, что коэффиціентами при $X-x$, $Y-y$, $Z-z$ служатъ тѣ самые опредѣлители 2-го порядка, которые входили знаменателями въ уравненія (13) параграфа 3-го.

5. СОПРИКАСАЮЩАЯСЯ ПЛОСКОСТЬ; БИНОРМАЛЬ.

Сохраняя всѣ обозначенія предшествующихъ параграфовъ, разсмотримъ плоскость, проходящую черезъ касательную въ точкѣ M данной кривой и черезъ точку N той же кривой, при чемъ точки эти соотвѣтствуютъ значеніямъ t и $t+\Delta t$ произвольнаго параметра. Координаты точекъ M и N обозначаемъ соотвѣтственно черезъ x, y, z и $x+\Delta x$, $y+\Delta y$, $z+\Delta z$. Такъ какъ

Черт.6.



плоскость наша (принадлежащая къ числу касательныхъ плоскостей) проходитъ черезъ точку M, то уравненіе ея имѣетъ видъ:

$$A(X-x)+B(Y-y)+C(Z-z)=0 \qquad (1)$$

гдѣ A, B, C – неизвѣстные еще пока коэффиціенты. Для того, чтобы эта плоскость проходила черезъ касательную, опредѣляемую уравненіями (4) параграфа 3-го, необходимо и достаточно, чтобы имѣло мѣсто слѣдующее соотношеніе:

$$A x' + B y' + C z' = 0 \tag{2}$$

которое выражаетъ требованіе, чтобы плоскость (1) была перпендикулярна къ нормальной плоскости. Наконецъ, для того, чтобы плоскость (1) проходила черезъ точку N, необходимо и достаточно, чтобы координаты этой точки удовлетворяли уравненію (1); такимъ образомъ получаемъ условіе

$$A.\Delta x + B\Delta y + C.\Delta z = 0 \tag{3}$$

Два соотношенія (2) и (3) опредѣляютъ отношенія двухъ изъ коэффиціентовъ A, B, C къ третьему и слѣдовательно позволяютъ написать уравненіе искомой плоскости. Предположимъ теперь, что точка N (черт.6) неограниченно приближается къ M, совпадая съ нею въ предѣлѣ; при этомъ плоскость (1) вращается около касательной въ точкѣ M и стремится къ нѣкоторому опредѣленному предѣльному положенію, въ которомъ она называется с о п р и к а с а ю щ е й с я п л о с к о с т ь ю. Для того чтобы доказать это и чтобы вывести уравненіе соприкасающейся плоскости, преобразуемъ равенство (3), разлагая Δx, Δy, Δz въ конечные ряды Тэйлóра по степенямъ Δt. Такъ какъ

$$\Delta x = \varphi(t + \Delta t) - \varphi(t)$$

и аналогично для Δy и Δz, то для достаточно малыхъ (по абсолютной величинѣ) значеній Δt имѣемъ:

$$\Delta x = \frac{\Delta t}{1} \cdot x' + \frac{\Delta t^2}{1.2} \varphi''(t + \theta_1 \Delta t)$$

$$\Delta y = \frac{\Delta t}{1} \cdot y' + \frac{\Delta t^2}{1.2} \psi''(t + \theta_2 \Delta t) \tag{4}$$

$$\Delta z = \frac{\Delta t}{1} \cdot z' + \frac{\Delta t^2}{1.2} \chi''(t + \theta_3 \Delta t),$$

гдѣ θ_1, θ_2, θ_3 – правильныя дроби. Вставляя въ равенство(3), собирая члены съ одинаковыми степенями Δ t и принимая во вниманіе равенство (2), получаемъ по сокращеніи на $\frac{\Delta t^2}{1.2}$:

$$A\varphi''(t+\theta_1\Delta t) + B\psi''(t+\theta_2\Delta t) + C\chi''(t+\theta_3\Delta t) = 0 \tag{5}$$

Мы предположили, что точка N неограниченно приближается къ точкѣ M; въ такомъ случаѣ Δ t стремится къ нулю и, переходя къ предѣлу для Δ t = 0, получаемъ:

$$A\varphi''(t) + B\psi''(t) + C\chi''(t) = 0 \tag{6}$$

или:

$$Ax'' + By'' + Cz'' = 0 \tag{7}$$

Равенства (2) и (7) позволяютъ опредѣлить отношенія двухъ изъ коэффиціентовъ A, B, C къ третьему, и такимъ образомъ мы получаемъ въ предѣлѣ вполнѣ опредѣленную плоскость, которая и есть соприкасающаяся плоскость въ точкѣ M. Уравненіе этой плоскости всего проще можемъ получить, исключая изъ трехъ уравненій (1), (2) и (7) коэффиціенты A, B, C, относительно которыхъ эти уравненія суть линейныя однородныя. Въ результатѣ получаемъ уравненіе соприкасающейся плоскости въ видѣ равенства нулю детерминанта 3-го порядка:

$$\begin{vmatrix} X-x, & Y-y, & Z-z \\ x' & y' & z' \\ x'' & y'' & z'' \end{vmatrix} = 0 \tag{8}$$

Разлагая детерминантъ по элементамъ 1-ой строки, имѣемъ:

$$(y'z'' - y''z')(X-x)+(z'x''-x'z'')(Y-y)+(x'y''-y'x'')(Z-z)=0 \quad (9)$$

Уравненіе (9) обращается въ тождество, если въ точкѣ M одновременно имѣютъ мѣсто три равенства

$$y'z''-y''z'=0,\quad z'x''-z''x'=0,\quad x'y''-y'x''=0 \qquad (10)$$

Поэтому во всемъ дальнѣйшемъ мы будемъ исключать изъ разсмотрѣнія тѣ точки кривой, для которыхъ выполняются эти условія; легко усмотрѣть, что подобныя точки принадлежатъ къ числу исключительныхъ и въ произвольной точкѣ кривой равенства (10), вообще говоря, не имѣютъ мѣста, а слѣдовательно въ произвольной точкѣ существуетъ одна вполнѣ опредѣленная соприкасающаяся плоскость.

Проведемъ черезъ точку M кривой прямую, перпендикулярную къ соприкасающейся плоскости; прямая эта, очевидно, принадлежитъ къ числу нормалей кривой, такъ какъ она перпендикулярна къ касательной, которая лежитъ въ соприкасающейся плоскости. Принято называть эту прямую б и н о р м а л ь ю. Уравненія ея легко получимъ какъ уравненія прямой, проходящей черезъ точку (x,y,z) кривой и перпендикулярной къ плоскости (9):

$$\frac{X-x}{y'z''-z'y''}=\frac{Y-y}{z'x''-x'z''}=\frac{Z-z}{x'y''-y''x'} \qquad (11)$$

Обозначая черезъ λ, μ, ν косинусы угловъ, образуемыхъ бинормалью съ осями координатъ, имѣемъ:

$$\lambda:\mu:\nu=(y'z''-z'y''):(z'x''-x'z''):(x'y''-y'x''). \qquad (12)$$

Такъ какъ $\lambda^2+\mu^2+\nu^2=1$, то для опредѣленія λ,μ,ν, остается раздѣлить каждое изъ выраженій, пропорціональныхъ

λ, μ, ν, на корень квадратный изъ суммы квадратовъ этихъ выраженій. Для сокращенія введемъ слѣдующее обозначеніе, которымъ часто будемъ пользоваться во всемъ послѣдующемъ. Будемъ знакомъ S, поставленнымъ передъ какимъ-нибудь выраженіемъ, обозначать сумму трехъ членовъ, изъ которыхъ первый совпадаетъ съ выраженіемъ, находящимся послѣ знака S, а остальные два получаются изъ него такъ называемой круговой замѣной буквъ въ порядкѣ осей координатъ x, y, z. При этомъ слѣдуетъ имѣть въ виду, что при подобной круговой замѣнѣ всякую величину, связанную съ осью x (напр. координату x какой-нибудь точки, уголъ какой-нибудь прямой съ осью x и т.п.), слѣдуетъ замѣнить аналогичной величиной, связанной съ осью ; величину, связанную съ осью У - величиной, связанной съ осью z, и наконецъ эту послѣднюю - величиной, связанной съ осью x. Такъ, напримѣръ, имѣемъ:

$$S\,x'^2 = x'^2 + y'^2 + z'^2$$

и слѣдовательно, обозначая производную дуги s по параметру черезъ s', можемъ написать (ср. § 1):

$$Sx'^2 = x'^2 + y'^2 + z'^2 \tag{12}$$

Пользуясь введеннымъ обозначеніемъ, можемъ написать формулы для косинусовъ угловъ, образуемыхъ бинормалью съ осями, въ слѣдующемъ видѣ:

$$\lambda = \frac{y'z''-y''z'}{\sqrt{S(y'z''-z'y'')^2}},\ \mu = \frac{z'x''-x'z''}{\sqrt{S(y'z''-z'y'')^2}},\ \nu = \frac{x'y''-y'x''}{\sqrt{S(y'z''-z'y'')^2}} \tag{13}$$

Выраженіе, стоящее подъ знакомъ радикала, можетъ быть нѣсколько упрощено, если воспользуемся равенствомъ (12) и равенствомъ

$$Sx'x'' = s's'' \tag{14}$$

которое получается дифференцированіемъ предшествующаго по t. Выписывая полностью всѣ члены суммы $S(y'z'' - y''z')$ и пользуясь равенствомъ (12), имѣемъ:

$$S(y'z''-y''z') = S(y'^2z''^2 - 2y'y''z'z'' + y''^2z'^2) = y'^2z''^2 + y''^2z'^2 + z'^2x''^2 + z''^2x'^2 +$$

$$+ x'^2y''^2 + x''^2y'^2 - 2y'y''z'z'' - 2z'z''x'x'' - 2x'x''y'y'' = Sx''^2(y'^2+z'^2) - 2Sy'y''z'z'' =$$

$$= Sx''^2(s'^2 - x'^2) - 2Sy'y''z'z'' = s'^2 Sx''^2 - [x'^2x''^2 + y'^2y''^2 + z'^2z''^2 + 2y'y''z'z'' + 2z'z''x'x'' +$$

$$+ 2x'x''y'y''] = s'^2 Sx''^2 - (Sx'x'')^2$$

или наконецъ, въ силу равенства (14)

$$S(y'z''-y''z')^2 = s'^2 Sx''^2 - s'^2s''^2 = s'^2[Sx''^2 - s''^2] =$$

$$= s'^2(x''^2 + y''^2 + z''^2 - s''^2) \qquad (15)$$

Внося полученное выраженіе въ формулы (13), имѣемъ:

$$\lambda = \frac{y'z''-z'y''}{s'\sqrt{x''^2+y''^2+z''^2-s''^2}}, \quad \mu = \frac{z'x''-z''x'}{s'\sqrt{x''^2+y''^2+z''^2-s''^2}}, \qquad (16)$$

$$\nu = \frac{x'y''-x''y'}{s'\sqrt{x''^2+y''^2+z''^2-s''^2}},$$

при чемъ

$$S' = \sqrt{x'^2 + y'^2 + z'^2}$$

и передъ обоими корнями квадратными въ формулахъ (16) подразумѣваетъ знакъ +, если такой же знакъ подразумѣвался передъ радикаломъ въ формулахъ (13). Въ частномъ случаѣ, когда $t = s$, имѣемъ $s' = 1$, $s'' = 0$, и формулы (16) принимаютъ видъ:

$$\lambda = \frac{y'z''-y''z'}{\sqrt{Sx''^2}}, \quad \mu = \frac{z'x''-z''x'}{\sqrt{Sx''^2}}, \quad \nu = \frac{x'y''-x''y'}{\sqrt{Sx''^2}} \qquad (17)$$

Формулы (13), опредѣляющія косинусы угловъ наклоненія бинормали къ осямъ координатъ, содержатъ квадратный корень и следовательно дають двѣ различныхъ системы значеній для λ, μ, ν, въ зависимости отъ выбора того или иного знака ($\pm$) передъ радикаломъ. Если мы условимся подразумѣвать передъ радикаломъ всегда знакъ +, то этимъ самымъ мы выбираемъ опредѣленное направленіе на бинормали за положительное. Впослѣдствіи мы увидимъ, почему приходится сдѣлать именно такой выборъ, а теперь лишь замѣтимъ, что разъ установлено положительное направленіе на бинормали, то вмѣстѣ съ тѣмъ установлено, какая сторона соприкасающейся плоскости считается положительной и какая - отрицательной; а именно, при движеніи по бинормали въ положительномъ направленіи мы переходимъ съ отрицательной стороны соприкасающейся плоскости на положительную. Постараемся опредѣлить, какъ расположена кривая относительно соприкасающейся плоскости въ смежности съ точкой прикосновенія.

Раздѣливъ лѣвую часть ур-ія (9) соприкасающейся плоскости на корень квадратный изъ суммы квадратовъ коэффиціентовъ, т.е. на

$$+\sqrt{S\,(y'z'' - y''z')^2},$$

приведемъ это уравненіе къ виду

$$\lambda(X-x)+\mu(Y-y)+\nu(Z-z)=0 \qquad (18)$$

Вставляя въ лѣвую часть вмѣсто текущихъ координатъ координаты какой-либо точки N, получимъ, какъ извѣстно, разстояніе этой точки отъ соприкасающейся плоскости. При этомъ, такъ какъ лѣвая часть уравненія (18), послѣ упомянутой подстановки, есть не что иное какъ проекція отрѣзка MN на положительное направленіе бинормали, то очевидно разстояніе точки N отъ соприкасающейся плоскости окажется положительнымъ или отрицательнымъ, смотря по тому, лежитъ ли точка N съ положительной или отрицательной стороны соприкасающейся плоскости.

Разсмотримъ въ частности точку N данной кривой, соотвѣтствующую значенію параметра $t + \Delta t$ и опредѣляемую координатами $x + \Delta x$, $y + \Delta y$, $z + \Delta z$. Разстояніе δ этой точки отъ соприкасающейся плоскости, по предыдущему, выражается формулой:

$$\delta = \frac{1}{+\sqrt{S(y'z''-z'y'')^2}} \cdot \begin{vmatrix} \Delta x, & \Delta y, & \Delta z \\ x', & y', & z' \\ x'', & y'', & z'' \end{vmatrix} \qquad (19)$$

Замѣнимъ Δx, Δy, Δz ихъ разложеніями по степенямъ Δt, предполагая существованіе производныхъ 4-го порядка:

$$\Delta x = \frac{\Delta t}{1} . x' + \frac{\Delta t^2}{1.2} . x'' + \frac{\Delta t^3}{1.2.3} . x''' + \frac{\Delta t^4}{1.2.3.4} \varphi^{IV}(t+\theta\Delta t) \text{ *)}$$

и аналогично для Δy и Δz. Отбрасывая въ первой строкѣ детерминанта въ формулѣ (19) члены, пропорціональные элементамъ 2-ой и 3-ей строки, и разлагая затѣмъ на сумму двухъ детерминантовъ, соотвѣтственно тому, что элементы 1-ой строки послѣ упомянутаго упрощенія будутъ состоять изъ двухъ слагаемыхъ, имѣемъ:

$$\delta = \frac{1}{\sqrt{S(y'z''-y''z')^2}} \cdot \begin{vmatrix} x''', & y''', & z''' \\ x', & y', & y' \\ x'', & y'', & y'' \end{vmatrix} \cdot \frac{\Delta t^3}{1.2.3} + \Delta t^4 . R,$$

гдѣ черезъ $\Delta t^4 . R$ обозначена совокупность членовъ 4-го

---

*) θ – правильная дробь.

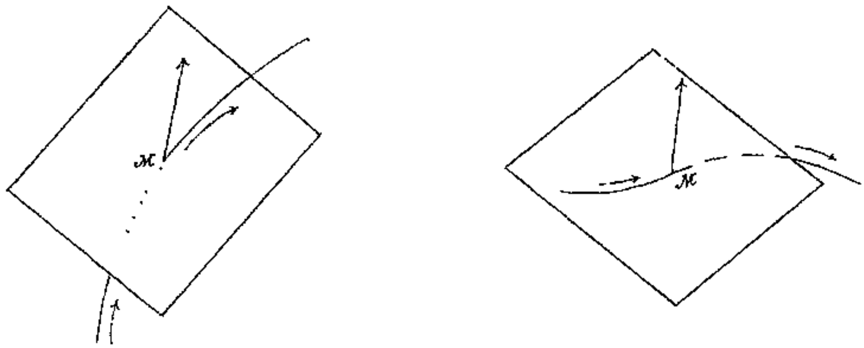
порядка относительно Δt. Наконецъ, переставляя строки въ опредѣлителѣ, входящемъ въ 1-ый членъ, получаемъ окончательное выраженіе искомаго разстоянія:

$$\delta = \frac{\Delta t^3}{1.2.3} \frac{1}{\sqrt{S(y'z''-z'y'')^2}} \begin{vmatrix} x', y', z' \\ x'', y'', z'' \\ x''', y''', z''' \end{vmatrix} + \Delta t^4 \cdot R \qquad (20)$$

При достаточно маломъ Δt (по абсолютной величинѣ) знакъ δ совпадаетъ со знакомъ 1-го члена и слѣдовательно измѣняется съ измѣненіемъ знака Δt, такъ какъ 1-ый членъ содержитъ третью степень Δt. Отсюда мы заключаемъ, что двѣ точки N, достаточно близкія къ точкѣ M, но лежащія по разныя стороны отъ M на данной кривой, лежатъ вмѣстѣ съ тѣмъ по разныя стороны соприкасающейся плоскости, проведенной въ точкѣ M. При движеніи точки N по кривой въ направленіи возрастанія t, приращеніе Δt мѣняетъ свой знакъ, переходя отъ отрицательныхъ значеній къ положительнымъ черезъ нуль, въ моментъ совпаденія точки N съ M. При этомъ разстояніе δ переходитъ отъ отрицательныхъ значеній къ положительнымъ или обратно, смотря по знаку детерминанта

$$\begin{vmatrix} x', & y', & z' \\ x'', & y'', & z'' \\ x''', & y''', & z''' \end{vmatrix} \qquad (21)$$

Такимъ образомъ, если детерминантъ (21) положителенъ, то точка N переходитъ съ отрицательной стороны соприкасающейся плоскости на положительную, а если этотъ детерминантъ отрицате-



Черт.7.

лентъ, то наоборотъ - съ положительной стороны на отрицательную (см. черт.7). Вмѣсто этого иногда говорятъ, что въ первомъ случаѣ кривая въ смежности съ точкой M переходитъ съ отрицательной стороны соприкасающейся плоскости на положительную, а во второмъ - наоборотъ.

Соприкасающейся плоскости можно дать опредѣленіе, отличное отъ того, изъ котораго мы исходили, а именно ее можно опредѣлить какъ предѣльное положеніе плоскости, проходящей черезъ три безконечно-близкія точки кривой. Въ самомъ дѣлѣ, разсмотримъ на ряду съ точкой M двѣ точки N и N′, соотвѣтствующія значеніямъ параметра $t+\Delta t$ и $t+\Delta' t$, и обозначимъ координаты этихъ точекъ соотвѣтственно черезъ

$x+\Delta x$, $y+\Delta y$, $z+\Delta z$ и $x+\Delta' x$, $y+\Delta' y$, $z+\Delta' z$.

Плоскость, проходящая черезъ точки M, N, N′, опредѣляется уравненіемъ

$$\begin{vmatrix} \mathcal{X}, & \mathcal{Y}, & \mathcal{Z}, & 1 \\ x, & y, & z, & 1 \\ x+\Delta x, & y+\Delta y, & z+\Delta z, & 1 \\ x+\Delta' x, & y+\Delta' y, & z+\Delta' z, & 1 \end{vmatrix} = 0 \tag{22}$$

Вычитая элементы 2-ой строки опредѣлителя изъ элементовъ остальныхъ строкъ, отъ чего опредѣлитель не мѣняетъ своей величины, получаемъ:

$$\begin{vmatrix} X-x, & Y-y, & Z-z, & 0 \\ x, & y, & z, & 1 \\ \Delta x, & \Delta y, & \Delta z, & 0 \\ \Delta' x, & \Delta' y, & \Delta' z, & 0 \end{vmatrix} = 0$$

или, разлагая детерминантъ по элементамъ послѣдняго столбца:

$$\begin{vmatrix} X-x, & Y-y, & Z-z \\ \Delta x, & \Delta y, & \Delta z \\ \Delta' x, & \Delta' y, & \Delta' z \end{vmatrix} = 0 \qquad (23)$$

Предполагая Δt и $\Delta' t$ достаточно малыми по абсолютной величинѣ, разлагаемъ приращенія Δx, Δy, Δz, $\Delta' x$, $\Delta' y$, $\Delta' z$ по степенямъ Δt и $\Delta' t$:

$$\Delta x = \frac{\Delta t}{1} . x' + \frac{\Delta t^2}{1.2} . x'' + \frac{\Delta t^3}{1.2.3} . \varphi'''(t + \theta \Delta t)$$

и аналогично для Δy и Δz;

$$\Delta' x = \frac{\Delta' t}{1} . x' + \frac{\Delta' t^2}{1.2} . x'' + \frac{\Delta' t^3}{1.2.3} . \varphi'''(t + \theta' \Delta t)$$

и аналогично для $\Delta' y$ и $\Delta' z$. Полагая $\Delta' t = k \Delta t$, сокращая уравненіе (23) на $k \Delta t^2$ и разлагая лѣвую часть по степенямъ Δt, имѣемъ:

$$(k-1)\frac{\Delta t}{1.2} \begin{vmatrix} X-x, & Y-y, & Z-z \\ x', & y', & z' \\ x'', & y'', & z'' \end{vmatrix} + \Delta t^2 . R = 0, \qquad (24)$$

гдѣ черезъ $\Delta t^2 . R$ обозначена совокупность членовъ 2-го и высшаго порядка.

Дѣля уравненіе (24) на Δt и переходя къ предѣлу для $\Delta t = 0$ въ предположеніи, что отношеніе $\underline{k}$ приращеній $\Delta' t$ и Δt остается конечнымъ и не стремится къ единицѣ, получаемъ уравненіе

$$\begin{vmatrix} X-x, & Y-y, & Z-z \\ x', & y', & z' \\ x'', & y'', & z'' \end{vmatrix} = 0, \qquad (9)$$

которое опредѣляетъ соприкасающуюся плоскость; такимъ образомъ плоскость, проходящая черезъ точки M, N, N', при неограниченномъ приближеніи точекъ N и N' къ M стремится къ опредѣленному предѣльному положенію, а именно къ соприкасающейся плоскости, проведенной въ точкѣ M.

Плоскость, проходящая черезъ три точки M, N, N', содержитъ прямыя MN и NN', изъ которыхъ каждая при сближеніи трехъ точекъ стремится къ касательной. Поэтому соприкасающуюся плоскость иногда еще опредѣляютъ какъ плоскость, проходящую черезъ двѣ безконечно близкія касательныя или еще лучше черезъ двѣ „послѣдовательныя" касательныя, понимая это опредѣленіе именно въ вышеуказанномъ смыслѣ. Съ этой же точки зрѣнія бинормаль есть прямая, перпендикулярная къ двумъ послѣдовательнымъ касательнымъ. Если бы мы написали уравненія прямой, проходящей черезъ точку (x, y, z) и перпендикулярной къ касательнымъ какъ въ данной точкѣ, такъ и въ точкѣ $(x+\Delta x,\ y+\Delta y,\ z+\Delta z)$, соотвѣтствующей значенію параметра $t+\Delta t$, и затѣмъ перешли бы къ предѣлу для $\Delta t = 0$, то пришли бы къ уравненіямъ (11). Замѣтимъ, между прочимъ, что уравненія бинормали мы можемъ написать также въ видѣ

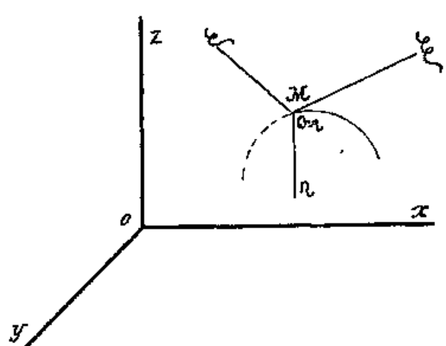
$$\frac{X-x}{\lambda} = \frac{Y-y}{\mu} = \frac{Z-z}{\nu}, \tag{25}$$

замѣняя знаменатели въ уравненіяхъ (11) пропорціональными имъ количествами.

6. ГЛАВНАЯ НОРМАЛЬ; СПРЯМЛЯЮЩАЯ ПЛОСКОСТЬ.

Главной нормалью пространственной кривой называютъ нормаль, лежащую въ соприкасающейся плоскости. Очевидно, главная нормаль перпендикулярна касательной и бинормали и можетъ быть иначе опредѣлена какъ прямая пересѣченія нормальной и соприкасающейся плоскостей. Если въ произвольной точкѣ M кривой (черт.8) проведемъ касательную, главную нормаль и бинормаль, то получимъ три взаимно-перпендикулярныхъ прямыхъ, которыя можемъ принять за оси прямоугольной системы координатъ, имѣющей начало въ точкѣ M. При этомъ касательную примемъ за ось ξ, главную нормаль - за ось η и бинормаль - за ось ζ. Плоскость $\xi\eta$ совпадаетъ, очевидно, съ соприкасающейся плоскостью, а плоскость $\eta\zeta$ - съ нормальной плоскостью въ точкѣ M. Наконецъ, плоскость $\xi\zeta$, т.е. плоскость, проходящая черезъ

Черт.8.



касательную и бинормаль и перпендикулярная къ главной нормали, называется с п р я м л я ю щ е й п л о с к о с т ь ю *). Мы уже установили положительное направленіе на касательной (§ 3), и слѣдовательно у насъ установлено положительное направленіе на оси ξ той системы координатъ, о которой идетъ рѣчь. Если мы установимъ еще положительное направленіе на одной изъ осей η или ζ, то само собою установится положительное направленіе и на другой оси, разъ только мы потребуемъ, чтобы взаимное расположеніе осей ξ, η, ζ было обычное, общепринятое расположеніе осей прямоугольной системы координатъ, при которомъ положительное вращеніе на каждой изъ плоскостей координатъ совершается по стрѣлкѣ часовъ для наблюдателя, находящагося на положительной сторонѣ плоскости. Итакъ, потребуемъ, чтобы положительныя направленія касательной, главной нормали и бинормали находились въ такомъ взаимномъ расположеніи,- тогда, по предыдущему, положительное направленіе на главной нормали устанавливается само собою, если выбрано положительное направленіе на бинормали, и обратно, положительное направленіе на бинормали установится само собою, если выберемъ положительное направленіе на главной нормали.

Мы обозначали (§ 3 и § 5) косинусы угловъ, образуемыхъ положительными направленіями касательной и бинормали съ осями координатъ, соотвѣтственно черезъ α, β, γ и

---

*) *Трехгранный уголъ, образуемый тремя плоскостями, называется с о п р о в о ж д а ю щ и м ъ угломъ.*

λ, μ, ν ; обозначимъ косинусы угловъ, образуемыхъ положительнымъ направленіемъ главной нормали съ осями x, y, z, черезъ l, m, n. Въ такомъ случаѣ девять косинусовъ: α, β, γ, l, m, n, λ, μ, ν суть косинусы девяти угловъ, образуемыхъ осями ξ, η, ζ нашей новой системы координатъ съ осями x, y, z старой системы, и мы можемъ для удобства записать ихъ въ слѣдующей табличкѣ.

	x	y	z
ξ	α	β	γ
η	l	m	n
ζ	λ	μ	ν

(1)

Такъ какъ обѣ системы координатъ прямоугольныя, то между девятью косинусами существуютъ извѣстныя соотношенія.

$$\begin{aligned}
&\alpha^2+\beta^2+\gamma^2=1 &\qquad& \alpha^2+l^2+\lambda^2=1\\
&l^2+m^2+n^2=1 && \beta^2+m^2+\mu^2=1\\
&\lambda^2+\mu^2+\nu^2=1 && \gamma^2+n^2+\nu^2=1\\
&\alpha l+\beta m+\gamma n=0 && \alpha\beta+lm+\lambda\mu=0\\
&l\lambda+m\mu+n\nu=0 && \beta\gamma+mn+\mu\nu=0\\
&\lambda\alpha+\mu\beta+\nu\gamma=0 && \gamma\alpha+nl+\nu\lambda=0
\end{aligned} \tag{2}$$

выводимыя въ аналитической геометріи. Кромѣ того, какъ слѣдствія этихъ соотношеній, имѣютъ мѣсто еще слѣдующія равенства:

$$\begin{aligned}
l &= \begin{vmatrix} \mu & \nu \\ \beta & \gamma \end{vmatrix} = \mu\gamma-\nu\beta\\
m &= \begin{vmatrix} \nu & \lambda \\ \gamma & \alpha \end{vmatrix} = \nu\alpha-\lambda\gamma\\
n &= \begin{vmatrix} \lambda & \mu \\ \alpha & \beta \end{vmatrix} = \lambda\beta-\mu\alpha
\end{aligned} \tag{3}$$

и аналогичныя имъ, которыя позволяютъ по шести косинусамъ, стоящимъ въ двухъ строкахъ или двухъ столбцахъ таблицы (1), вычислить остальные три. Замѣтимъ, что два послѣднихъ изъ соотношеній (2) могутъ быть получены изъ перваго круговой замѣны (см. § 5) буквъ α, β, γ и μ, λ, ν. Формулы (3) позволяютъ вычислить косинусы , π, n угловъ наклоненія главной нормали по извѣстнымъ выраженіямъ α, β, γ (§ 3) и λ, μ, ν (§ 5). Но при этомъ слѣдуетъ имѣть въ виду, что нами не былъ окончательно выясненъ вопросъ о положительномъ направленіи бинормали (ср. § 5), такъ что формулы (13) § 5 собственно должны быть написаны въ видѣ

$$\lambda=\mathcal{E}\cdot\frac{y'z''-z'y''}{\sqrt{S(y'z''-z'y'')^2}}\,,\quad \mu=\mathcal{E}\cdot\frac{z'x''-z''x'}{\sqrt{S(y'z''-z'y'')^2}}\,,\qquad (4)$$

$$\nu=\mathcal{E}\cdot\frac{x'y''-x''y'}{\sqrt{S(y'z''-y''z')^2}}\,,$$

гдѣ $\mathcal{E}=\pm 1$. Правда, мы уже указали, что слѣдуетъ выбрать $\mathcal{E}=+1$ (см. § 5), но не привели никакихъ основаній для такого выбора, имѣя въ виду оправдать его впослѣдствіи. Намъ предстоитъ сдѣлать это именно теперь; поэтому оставимъ $\mathcal{E}$ въ формулахъ (4) неопредѣленнымъ, т.е. оставимъ пока произвольнымъ положительное направленіе бинормали, но зато установимъ положительное направленіе на главной нормали; тогда, по предыдущему, само собою установится положительное направленіе на бинормали и слѣдовательно опредѣлится $\mathcal{E}$.

Для того чтобы выбрать положительное направленіе на главной нормали, разсмотримъ спрямляющую плоскость. Уравненiе этой плоскости, какъ уравненiе плоскости, проходящей черезъ точку (x,y,z) и перпендикулярной къ главной нормали, имѣетъ видъ

$$l(X-x)+m(Y-y)+n(Z-z)=0 \tag{5}$$

гдѣ X, Y, Z - текущiя координаты. Замѣняя l,m,n ихъ выраженiями (3), можемъ написать уравненiе (5) въ видѣ равенства нулю детерминанта третьяго порядка:

$$\begin{vmatrix} X-x, & Y-y, & Z-z \\ \lambda, & \mu, & \nu \\ \alpha, & \beta, & \gamma \end{vmatrix} = 0 \tag{6}$$

Въ самомъ дѣлѣ, разлагая опредѣлитель по элементамъ первой строки, приходимъ непосредственно къ уравненiю (5). Замѣняя λ, μ, ν ихъ выраженiями (4), а α, β, γ - выраженiями (6) параграфа 3-го, получаемъ, по вынесенiи общихъ множителей изъ 2-ой и 3-ей строки:

$$\frac{\varepsilon}{\sqrt{S(y'z''-y''z')^2}} \cdot \frac{1}{\sqrt{Sx'^2}} \begin{vmatrix} X-x, & Y-y, & Z-z \\ y'z''-y''z', & z'x''-z''x', & x'y''-x''y' \\ x', & y', & z' \end{vmatrix} = 0 \tag{7}$$

Лѣвая часть уравненiя (7) совпадаетъ съ лѣвой частью уравненiя (5); слѣдовательно коэффицiентами при текущихъ координатахъ X, Y, Z служатъ l,m,n. Разсмотримъ на данной кривой точку $(x+\Delta x,\ y+\Delta y,\ z+\Delta z)$, соотвѣтствующую значенiю параметра $t+\Delta t$, и опредѣлимъ ея разстоянiе δ отъ соприкасающей плоскости. Для вычисленiя этого разстоянiя достаточно въ лѣвую часть уравненiя (7) подставить вмѣсто текущихъ координатъ координаты $x+\Delta x$, $y+\Delta y$, $z+\Delta z$

разсматриваемой точки. Такимъ образомъ имѣемъ:

$$\delta = \frac{\mathcal{E}}{\sqrt{S(y'z''-y''z')^2}\cdot\sqrt{S x'^2}} \begin{vmatrix} \Delta x, & \Delta y, & \Delta z \\ y'z''-y''z', & z'x''-z''x', & x'y''-x''y' \\ x', & y', & z' \end{vmatrix} \qquad (8)$$

Замѣнимъ въ опредѣлителѣ, входящемъ въ выраженіе (8), Δx, Δy, Δz ихъ разложеніями:

$$\Delta x = \frac{\Delta t}{1}\cdot x' + \frac{\Delta t^2}{1.2}\cdot x'' + \frac{\Delta t^3}{1.2.3}\cdot \varphi'''(t+\theta.\Delta t)$$

и аналогично для Δy и Δz.

Разлагая опредѣлитель на сумму опредѣлителей, видимъ, что первый членъ исчезаетъ, такъ какъ содержитъ двѣ тождественныя строки, и слѣдовательно получаемъ для разстоянія выраженіе слѣдующаго вида:

$$\delta = \frac{\mathcal{E}}{\sqrt{S(y'z''-y''z')^2}\cdot\sqrt{S x'^2}} \begin{vmatrix} x'', & y'', & z'' \\ y'z''-y''z', & z'x''-z''x', & x'y''-x''y' \\ x', & y', & z' \end{vmatrix} \cdot \frac{\Delta t^2}{1.2} + \Delta t^3.\mathcal{R}$$

гдѣ черезъ $\Delta t^3.R$ обозначена совокупность членовъ 3-го порядка относительно Δt. Разложимъ детерминантъ, входящій въ послѣднее выраженіе δ, по элементамъ второй строки; тогда мы получимъ:

$$(y'z''-y''z')^2 + (z'x''-z''x')^2 + (x'y''-x''y')^2 = S(y'z''-y''z')^2$$

и слѣдовательно для разстоянія окончательно получаемъ слѣдующее выраженіе:

$$\delta = \frac{\mathcal{E}.\sqrt{S(y'z''-y''z')^2}}{\sqrt{S x'^2}}\cdot\frac{\Delta t^2}{1.2} + \Delta t^3.\mathcal{R} \qquad (9)$$

гдѣ передъ обоими радикалами подразумѣвается знакъ +. При достаточно маломъ (по абс.величинѣ) Δt знакъ δ совпадаетъ со знакомъ 1-го члена и слѣдовательно не измѣняется съ измѣненіемъ знака Δt. Отсюда мы заключаемъ (ср. § 5), что всѣ точки кривой, достаточно близкія къ точкѣ (x,y,z), лежатъ по одну сторону спрямляющей плоскости или, другими словами - кривая въ смежности съ данной точкой лежитъ по одну сторону спрямляющей плоскости. Выберемъ за положительное направленіе главной нормали направленіе отъ точки кривой въ ту сторону отъ спрямляющей плоскости, по которую лежитъ данная кривая (см. черт.8). Въ такомъ случаѣ точки кривой, достаточно близкія къ точкѣ (x,y,z), должны лежать съ положительной стороны спрямляющей плоскости, и слѣдовательно для достаточно малыхъ значеній Δt разстояніе δ должно быть положительнымъ. Между тѣмъ знакъ δ въ этомъ предположеніи совпадаетъ со знакомъ $\mathcal{E}$, какъ это явствуетъ изъ формулы (9), и слѣдовательно мы должны положить $\mathcal{E} = +1$, т.е. установить положительное направленіе на бинормали такъ, какъ это было сдѣлано въ параграфѣ 5. Полагая $\mathcal{E} = 1$ въ равенствахъ (4), мы приходимъ къ прежнимъ выраженіямъ для λ, μ, ν (§ 5, рав.13); вставляя эти значенія λ, μ, ν, а также значенія α, β, γ (§ 3, равен.6) въ формулы (3), вычислимъ l, m, n.

Выполнимъ вычисленіе только для l, такъ какъ выраженіе для m и n получается круговой перестановкой буквъ. Итакъ, имѣемъ

$$l = \frac{(z'x''-z''x')z'-(x'y''-x''y')y'}{\sqrt{S(y'z''-y''z')^2}\cdot\sqrt{S\,x'^2}} \tag{10}$$

Преобразуя числитель и принимая во вниманіе соотношенія:

$$Sx'^2 = x'^2+y'^2+z'^2 = s'^2, \quad Sx'x'' = x'x''+y'y''+z'z'' = s's''$$

(см. § 5, форм.12 и 14), гдѣ черезъ s' и s" обозначены первая и вторая производныя дуги s по параметру t, получаемъ:

$$(z'x''-z''x')z'-(x'y''-x''y')y'=z'^2x''-z'z''x'-y'y''x'+y'^2x''=$$
$$=x''(y'^2+z'^2)-x'(y'y''+z'z'')=x''(Sx'^2-x'^2)-x'(Sx'x''-x'x'')=$$
$$=x''(s'^2-x'^2)-x'(s's''-x'x'')=x''s'^2-x's's''=$$
$$=s'(s'x''-s''x'). \tag{11}$$

Замѣняя въ формулѣ (10) числитель полученнымъ выраженіемъ (11) и принимая во вниманіе, что радикалъ, стоящій на второмъ мѣстѣ въ знаменателѣ, равенъ s', имѣемъ:

$$l=\frac{s'x''-s''x'}{\sqrt{S(y'z''-y''z')^2}}$$

Для того чтобы получить m и n, остается выполнить круговую перестановку буквъ, при чемъ модельно s', s" и знаменатель остаются безъ измѣненія. Такимъ образомъ имѣемъ окончательно:

$$l=\frac{s'x''-s''x'}{\sqrt{S(y'z''-y''z')^2}},\quad m=\frac{s'y''-s''y'}{\sqrt{S(y'z''-y''z')^2}},\quad n=\frac{s'z''-s''z'}{\sqrt{S(y'z''-y''z')^2}}, \tag{12}$$

при чемъ передъ радикаломъ въ знаменателѣ подразумѣвается знакъ +. Если же еще воспользуемся формулой (15) парагр.5, то можемъ замѣнить предшествующія выраженія косинусовъ l, m, n равносильными имъ нижеслѣдующими:

$$l=\frac{s'x''-s''x'}{s'\sqrt{Sx''^2-s''^2}},\quad m=\frac{s'y''-s''y'}{s'\sqrt{Sx''^2-s''^2}},\quad n=\frac{s'z''-s''z'}{s'\sqrt{Sx''^2-s''^2}} \tag{13}$$

Если въ частности t = s, т.е. параметръ равенъ дугѣ, то s' = 1, s" = 0, и формулы (13) принимаютъ видъ:

$$l=\frac{\frac{d^2x}{ds^2}}{\sqrt{\left(\frac{d^2x}{ds^2}\right)^2+\left(\frac{d^2y}{ds^2}\right)^2+\left(\frac{d^2z}{ds^2}\right)^2}}\,,\quad m=\frac{\frac{d^2y}{ds^2}}{\sqrt{\left(\frac{d^2x}{ds^2}\right)^2+\left(\frac{d^2y}{ds^2}\right)^2+\left(\frac{d^2z}{ds^2}\right)^2}}\,,$$

$$n=\frac{\frac{d^2z}{ds^2}}{\sqrt{\left(\frac{d^2x}{ds^2}\right)^2+\left(\frac{d^2y}{ds^2}\right)^2+\left(\frac{d^2z}{ds^2}\right)^2}} \qquad (14)$$

Замѣняя l,m,n въ уравненіи (5) спрямляющей плоскости ихъ выраженіями (12) и отбрасывая общій знаменатель, получаемъ:

$$(s'x''-s''x')(X-x)+(s'y''-s''y')(Y-y)+(s'z''-s''z')(Z-z)=0 \qquad (15)$$

Въ частномъ случаѣ для t = s это ур-іе принимаетъ видъ:

$$\frac{d^2x}{ds^2}(X-x)+\frac{d^2y}{ds^2}(Y-y)+\frac{d^2z}{ds^2}(Z-z)=0 \qquad (16)$$

Главная нормаль, какъ прямая, проходящая черезъ точку (x,y,z) и образующая съ осями координатъ углы, косинусы которыхъ равны l,m,n, опредѣляется уравненіями

$$\frac{X-x}{l}=\frac{Y-y}{m}=\frac{Z-z}{n} \qquad (17)$$

Замѣняя l,m,n пропорціональными имъ выраженіями, на основаніи формулъ (12) имѣемъ:

$$\frac{X-x}{s'x''-s''x'}=\frac{Y-y}{s'y''-s''y'}=\frac{Z-z}{s'z''-s''z'} \qquad (18)$$

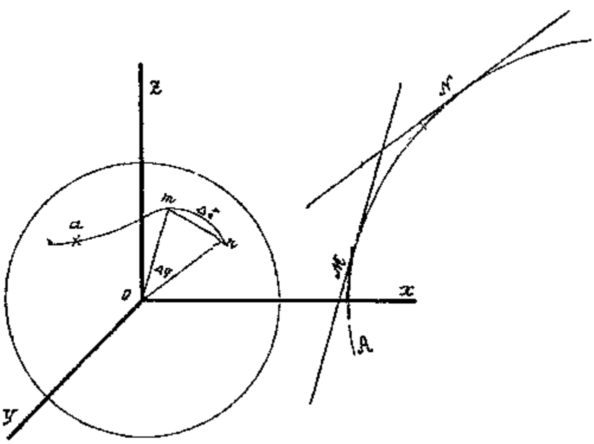
Въ частномъ случаѣ, когда параметръ t равенъ дугѣ s, уравненія (18) принимаютъ видъ:

$$\frac{X-x}{\frac{d^2x}{ds^2}}=\frac{Y-y}{\frac{d^2y}{ds^2}}=\frac{Z-z}{\frac{d^2z}{ds^2}} \qquad (19)$$

7. КРИВИЗНА ПРОСТРАНСТВЕННОЙ КРИВОЙ.

Опредѣленіе кривизны пространственной кривой вполнѣ аналогично соотвѣтствующему опредѣленію для плоской кривой.

Черт.9.



Разсмотримъ на данной кривой точку M (черт.9) и точку N, которую будемъ неограниченно приближать къ M. Касательныя въ точкахъ M и N образуютъ уголъ $\Delta\varphi$, который стремится къ нулю при сближеніи точекъ N и M. Предѣлъ, къ которому стремится отношеніе угла $\Delta\varphi$ къ дугѣ MN при приближеніи точки N къ M, называемъ к р и в и з н о й кривой линіи въ точкѣ M. Обозначая кривизну черезъ K и дугу MN черезъ Δs, имѣемъ такимъ образомъ:

$$K=\left(\lim \frac{\Delta\varphi}{\Delta s}\right)_{\Delta s=0} \qquad (1)$$

Касательныя въ двухъ точкахъ пространственной кривой, вообще говоря, не пересѣкаются, и для того чтобы получить уголъ $\Delta\varphi$ слѣдуетъ провести черезъ какую-нибудь точку пространства двѣ прямыя, параллельныя соотвѣтственно двумъ касательнымъ въ точкахъ M и N. Уголъ, образуемый этими двумя прямыми, и есть нашъ уголъ $\Delta\varphi$. Будемъ черезъ какую-нибудь опредѣленную точку, напримѣръ черезъ начало координатъ O (черт.9) проводить прямыя, параллельныя касательнымъ данной кривой, притомъ въ направленіи, соотвѣтствующемъ положительному направленію каждой касательной. Если кромѣ того опишемъ изъ точки O, какъ изъ центра, сферу радіусомъ = 1, то въ пересѣченіи этой сферы съ вышеупомянутыми прямыми Om, On..... будемъ имѣть точки m, n....., соотвѣтствующія точкамъ M, N..... данной кривой. Геометрическое мѣсто точки m, соотвѣтствующей точкѣ M, которая перемѣщается по данной кривой, есть нѣкоторая линія, лежащая на нашей сферѣ радіуса = 1 и называемая с ф е р и ч е с к о й и н д и к а т р и с о й к а с а т е л ь н ы х ъ данной кривой. Пусть на кривой выбрана какая-нибудь точка A за начало дугъ и пусть ей соотвѣтствуетъ точка a на индикатрисѣ; будемъ обозначать дугу кривой AM черезъ s и соотвѣтствующую ей дугу индикатрисы am черезъ σ. Дуга AN данной кривой въ такомъ случаѣ можетъ быть обозначена черезъ $s+\Delta s$, а дуга an индикатрисы - черезъ $\sigma+\Delta\sigma$, и слѣдовательно дуга индикатрисы mn, соотвѣтствующая дугѣ $MN = \Delta s$ данной кривой, равна $\Delta\sigma$. Уголъ $\Delta\varphi$ двухъ касательныхъ въ точкахъ M и N, согласно предыдущему, равенъ углу между радіусами Om и On, проведенными въ точки m и n индикатрисы, или, иначе - равенъ дугѣ большого круга, проведенной между точками m и n на нашей сферѣ (такъ какъ радіусъ этой сферы, а слѣдовательно и радіусъ большого круга равенъ единицѣ). Обозначая эту дугу черезъ $\smile mn$, а соотвѣтствующую хорду черезъ $\overline{mn}$, имѣемъ очевидно:

$$\frac{\Delta\varphi}{\Delta s}=\frac{\breve{mn}}{\Delta s}=\frac{\breve{mn}}{\Delta\sigma}\cdot\frac{\Delta\sigma}{\Delta s}=\frac{\breve{mn}}{\overline{mn}}\cdot\frac{\overline{mn}}{\Delta\sigma}\cdot\frac{\Delta\sigma}{\Delta s}.$$

Предполагая, что точка N неограниченно приближается къ M и переходя къ предѣлу, получаемъ въ силу равенства (1):

$$K = \lim \frac{\Delta\varphi}{\Delta s} = \lim \frac{\breve{mn}}{\overline{mn}} \cdot \lim \frac{\overline{mn}}{\Delta\sigma} \lim \frac{\Delta\sigma}{\Delta s}, \qquad (2)$$

Но на основаніи теоремы параграфа 2-го о предѣлѣ отношенія дуги кривой къ соотвѣтствующей хордѣ имѣемъ:

$$\lim \frac{\breve{mn}}{\overline{mn}} = 1, \qquad \lim \frac{\overline{mn}}{\Delta\sigma} = 1,$$

(см. § 2, равенства 4 и 5), такъ какъ $\overline{mn}$ есть хорда, соотвѣтствующая одновременно дугѣ $\breve{mn}$ большого круга и дугѣ $\Delta\sigma$ индикатрисы. Такимъ образомъ равенство (2) принимаетъ видъ:

$$K = \lim \frac{\Delta\sigma}{\Delta s}, \qquad (3)$$

и мы приходимъ къ новому опредѣленію кривизны, какъ предѣла, къ которому стремится отношеніе дуги индикатрисы къ дугѣ кривой, въ томъ предположеніи, что конецъ дуги неограниченно приближается къ ея началу, т.е. къ той точкѣ M, для которой мы желаемъ опредѣлить кривизну.

Пусть данная кривая опредѣляется уравненіями вида

$$x = \varphi(t), \ y = \psi(t), \ z = \chi(t); \qquad (4)$$

длина дуги s есть функція параметра t. Координаты точки m индикатрисы, какъ проекціи радіуса-вектора Om на оси координатъ, равны косинусамъ угловъ, образуемыхъ этимъ радіусомъ-векторомъ съ осями, такъ какъ длина Om равна единицѣ; принимая во вниманіе, что радіусъ Om параллеленъ касательной къ данной кривой въ точкѣ M, видимъ, что координаты точки m равны α, β, γ (см. § 3), т.е. косинусамъ угловъ, образуемыхъ положительнымъ направленіемъ касательной съ осями координатъ. Для произвольной точки данной кривой α, β, γ суть функціи параметра t, входящаго въ уравненія (4); равенства

$$\alpha = \varphi_1(t), \quad \beta = \psi_1(t), \quad \gamma = \chi_1(t) \tag{5}$$

которыя мы такимъ образомъ получаемъ, суть уравненія индикатрисы. Дуга σ этой кривой, конечно, есть функція того же параметра t. Предполагая, что точка M данной кривой, которую мы рассматривали выше, соотвѣтствуетъ значенію параметра = t, а точка N - значенію $t+\Delta t$ и дѣля числитель и знаменатель дроби $\frac{\Delta\sigma}{\Delta s}$, входящей въ равенство (3), на Δt, получаемъ:

$$K = \lim_{\Delta t = 0} \frac{\frac{\Delta\sigma}{\Delta t}}{\frac{\Delta s}{\Delta t}} = \frac{\lim \frac{\Delta\sigma}{\Delta t}}{\lim \frac{\Delta s}{\Delta t}} = \frac{\frac{d\sigma}{dt}}{\frac{ds}{dt}} = \frac{\sigma'}{s'} = \frac{d\sigma}{ds} \tag{6}$$

Кривизна, такимъ образомъ, равна отношенію производныхъ или дифференціаловъ дуги индикатрисы и дуги данной кривой. Полагая $K = \frac{1}{\rho}$, имѣемъ:

$$\frac{1}{\rho} = \frac{\sigma'}{s'} = \frac{d\sigma}{ds} \tag{7}$$

и слѣдовательно

$$\rho = \frac{s'}{\sigma'} = \frac{ds}{d\sigma}, \tag{8}$$

ρ называется р а д і у с о м ъ к р и в и з н ы въ точкѣ M данной кривой.

Такъ какъ σ есть дуга индикатрисы, опредѣляемой уравненіями вида (5), то

$$\sigma' = \sqrt{\alpha'^2 + \beta'^2 + \gamma'^2} \tag{9}$$

и слѣдовательно формула (8) даетъ намъ

$$\frac{1}{\rho} = \frac{\sqrt{\alpha'^2 + \beta'^2 + \gamma'^2}}{s'} \tag{10}$$

или въ иной формѣ, по умноженіи числителя и знаменателя на dt:

$$\frac{1}{\rho} = \sqrt{\left(\frac{d\alpha}{ds}\right)^2 + \left(\frac{d\beta}{ds}\right)^2 + \left(\frac{d\gamma}{ds}\right)^2} \tag{11}$$

Въ силу формулъ (6) параграфа 3-го и равенства

$$s' = \sqrt{x'^2 + y'^2 + z'^2}$$

имѣемъ

$$\alpha = \frac{x'}{s'},\ \beta = \frac{y'}{s'},\ \gamma = \frac{z'}{s'} \tag{12}$$

Дифференцируя по t эти выраженія, получаемъ:

$$\alpha' = \frac{s'x'' - s''x'}{s'^2},\ \beta' = \frac{s'y'' - s''y'}{s'^2},\ \gamma' = \frac{s'z'' - s''z'}{s'^2}, \tag{13}$$

и слѣдовательно, вставляя въ формулу (11), имѣемъ:

$$\frac{1}{\rho} = \frac{\sqrt{S(s'x'' - s''x')^2}}{s'^3} = \frac{\sqrt{s'^2 Sx''^2 - 2s's''Sx'x'' + s''^2 Sx'^2}}{s'^3}$$

Принимая во вниманіе соотношенія

$$Sx'^2 = s'^2, \qquad Sx'x'' = s's''$$

(ср. § 5), приводимъ подкоренное выраженіе къ виду

$$s'^2 Sx''^2 - s'^2 s''^2 = s'^2 (Sx''^2 - s''^2)$$

и слѣдовательно получаемъ

$$\frac{1}{\rho} = \frac{\sqrt{Sx''^2 - s''^2}}{s'^2} = \frac{\sqrt{Sx''^2 - s''^2}}{Sx'^2} \tag{14}$$

Наконецъ, если воспользуемся соотношеніемъ

$$S(y'z'' - y''z')^2 = s'^2 \left[Sx''^2 - s''^2 \right]$$

(см. § 5, форм.15), то можемъ преобразовать предыдущее выраженіе къ слѣдующему виду:

$$\frac{1}{\rho} = \frac{\sqrt{S(y'z'' - y''z')^2}}{s'^3} = \frac{\sqrt{S(y'z'' - y''z')^2}}{(Sx'^2)^{\frac{3}{2}}} \tag{15}$$

Формулы (14) и (15) содержатъ квадратный радикалъ; условимся подразумѣвать передъ нимъ всегда знакъ +; такъ какъ $s' = \sqrt{Sx'^2}$

согласно условію, поставленному выше, тоже существенно положительно, то слѣдовательно радіусъ кривизны ρ мы считаемъ существенно-положительнымъ количествомъ. Въ этомъ заключается нѣкоторое отличіе нашего опредѣленіе отъ опредѣленія радіуса кривизны, даннаго въ теоріи плоскихъ кривыхъ, гдѣ мы допускали и положительныя и отрицательныя значенія для радіуса кривизны.

Предположимъ въ частности $t = s$. Въ такомъ случаѣ $s' = 1$, $s'' = 0$, и формулы (14) и (15) принимаютъ видъ:

$$\frac{1}{\rho} = \sqrt{S x''^2} = \sqrt{\left(\frac{d^2x}{ds^2}\right)^2 + \left(\frac{d^2y}{ds^2}\right)^2 + \left(\frac{d^2z}{ds^2}\right)^2} \tag{16}$$

$$\frac{1}{\rho} = \sqrt{S(y'z'' - y''z')^2} \tag{17}$$

Посмотримъ, чему равенъ радіусъ кривизны прямой линіи. Такъ какъ касательная во всѣхъ точкахъ прямой линіи, очевидно, совпадаетъ съ этой прямой, то слѣдовательно въ разсматриваемомъ случаѣ α, β, γ постоянны, а потому $\alpha' = \beta' = \gamma' = 0$, и слѣдовательно, въ силу формулы (10): $\dfrac{1}{\rho} = 0$, т.е. кривизна прямой линіи во всѣхъ ея точкахъ равна нулю, а радіусъ кривизны равенъ безконечности. Обратно, пусть во всѣхъ точкахъ данной линіи имѣемъ $\dfrac{1}{\rho} = 0$. Предполагая, что данная линія - дѣйствительная, получаемъ изъ формулы (11)

$$\frac{d\alpha}{ds} = 0, \quad \frac{d\beta}{ds} = 0, \quad \frac{d\gamma}{ds} = 0 \tag{18}$$

такъ какъ сумма квадратовъ можетъ исчезать лишь при исчезновеніи каждаго слагаемаго въ отдѣльности. Изъ равенствъ (18) слѣдуетъ, что косинусы α, β, γ постоянны во всѣхъ точкахъ данной линіи. Обозначая ихъ постоянныя значенія черезъ a,b,c, при чемъ конечно $a^2 + b^2 + c^2 = 1$, имѣемъ такимъ образомъ

$$\alpha = a, \quad \beta = b, \quad \gamma = c; \quad \text{но}$$

$$\alpha = \frac{dx}{ds}, \quad \beta = \frac{dy}{ds}, \quad \gamma = \frac{dz}{ds}$$ (ср. § 3); слѣдовательно:

$$\frac{dx}{ds} = a, \quad \frac{dy}{ds} = b, \quad \frac{dz}{ds} = c,$$

откуда

$$x = as + A, \quad y = bs + B, \quad z = cs + C, \tag{19}$$

гдѣ A,B,C - произвольныя постоянныя. Уравненія (19) опредѣляютъ, очевидно, прямую линію. Итакъ, кривизна тождественно равна нулю для прямой линіи и только для прямой.

Обращаясь къ формулѣ (15), замѣчаемъ, что необходимымъ и достаточнымъ условіемъ для того, чтобы кривизна равнялась нулю служатъ три равенства:

$$x'y'' - x''y' = 0, \quad y'z'' - y''z' = 0, \quad z'x'' - z''x' = 0, \tag{20}$$

съ которыми мы уже встрѣчались въ параграфѣ 5-мъ. Сопоставляя этотъ результатъ съ предыдущимъ, видимъ, что три равенства(20) тождественно имѣютъ мѣсто во всѣхъ точкахъ прямой линіи и только прямой. Для всякой кривой линіи три равенства (20) могутъ одновременно имѣть мѣсто лишь въ отдѣльныхъ, исключительныхъ точкахъ.

Отложимъ на главной нормали въ положительную сторону отъ точки M кривой отрѣзокъ MC, равный радіусу кривизны ρ. Точка C называется ц е н т р о м ъ к р и в и з н ы, а кругъ, описанный изъ C какъ изъ центра радіусомъ = ρ въ соприкасающейся плоскости, называется к р у г о м ъ к р и в и з н ы. Наконецъ, перпендикуляръ, возставленный изъ центра кривизны къ соприкасающейся плоскости, называется о с ь ю к р и в и з н ы; ось кривизны, очевидно, параллельна бинормали.

Называя черезъ a, b, c координаты центра кривизны C въ точкѣ M (x, y, z) данной кривой, имѣемъ очевидно

$$a = x + l\rho, \quad b = y + m\rho, \quad c = z + n\rho, \tag{21}$$

такъ какъ отрѣзокъ MC равенъ радiусу кривизны ρ и образуетъ съ осями углы, косинусы которыхъ суть l, m, n, а потому проекцiи этого отрѣзка на оси координатъ, выражаемыя разностями $a-x$, $b-y$, $c-z$ координатъ точекъ C и M, равны соотвѣтственно $l\rho$, $m\rho$ и $n\rho$.

Кругъ кривизны можно также опредѣлить какъ предѣльное положенiе круга, проходящаго черезъ три безконечно-близкiя точки кривой. Возьмемъ на кривой три точки M, N и N', соотвѣтствующiя значенiямъ параметра t, $t+\Delta t$ и $t+\Delta' t$. Кругъ, проходящiй черезъ эти три точки, можемъ опредѣлить какъ сѣченiе плоскости MNN' со сферой, проходящей черезъ тѣ же три точки. Для большаго удобства можемъ, кромѣ того, выбрать эту сферу такъ, чтобы центръ ея лежалъ въ плоскости MNN' въ такомъ случаѣ кругъ, о которомъ идетъ рѣчь, будетъ большимъ кругомъ этой сферы, и слѣдовательно радiусъ его равенъ радiусу R сферы, а центръ совпадаетъ съ центромъ (a, b, c) сферы. Уравненiе сферы имѣетъ видъ:

$$(X-a)^2+(Y-b)^2+(Z-c)^2=R^2 \tag{22}$$

Параметры a, b, c, R опредѣляются изъ условiй, чтобы сфера проходила черезъ точки M, N, N' и чтобы центръ ея лежалъ въ плоскости MNN'. Переходя затѣмъ къ предѣлу въ предположеніи, что точки N и N' сливаются съ точкой M, замѣчаемъ, что плоскость MNN' обращается въ соприкасающуюся плоскость, уравненіе которой имѣетъ видъ

$$\lambda(X-x) + \mu(Y-y) + \nu(Z-z) = 0$$

(см. § 5), и слѣдовательно послѣднее условіе выражается равенствомъ

$$\lambda(a-x)+\mu(b-y)+\nu(c-z)=0 \qquad (23)$$

Перенося въ уравненіи (22) членъ R^2 въ лѣвую часть и замѣняя текущія координаты x, y, z функціями $\varphi(t)$, $\psi(t)$, $\chi(t)$ изъ уравненій (4) данной кривой, получаемъ нѣкоторую функцію $F(t)$ параметра t; такимъ образомъ мы полагаемъ

$$F(t)=[\varphi(t)-a]^2+[\psi(t)-b]^2+[\chi(t)-c]^2-R^2=$$
$$=(x-a)^2+(y-b)^2+(z-c)^2-R^2, \qquad (24)$$

при чемъ x, y, z опредѣляются уравненіями данной кривой. По условію сфера должна проходить черезъ точки M, N, N'. соотвѣтствующія значеніямъ t, $t+\Delta t$ и $t+\Delta' t$ параметра; слѣдовательно мы должны имѣть

$$F(t) = 0, \qquad F(t+\Delta t) = 0, \qquad F(t+\Delta' t) = 0.$$

Мы уже разсматривали уравненія подобнаго типа и видѣли, что въ предѣлѣ для $\Delta t = 0$, $\Delta' t = 0$ система, написанная выше, даетъ намъ

$$F(t) = 0, \qquad F'(t) = 0, \qquad F''(t) = 0.$$

Вставляя вмѣсто $F(t)$ его выраженіе (24), получаемъ:

$$(x-a)^2 + (y-b)^2 + (z-c)^2 = R^2$$
$$(x-a)\,x' + (y-b)\,y' + (z-c)\,z' = 0$$
$$(x-a)\,x'' + (y-b)\,y'' + (z-c)\,z'' + x'^2 + y'^2 + z'^2 = 0.$$

Умножая второе и третье уравненія на -1, замѣняя во второмъ x', y', z' пропорціональными имъ косинусами α, β, γ угловъ, образуемыхъ касательной съ осями, далѣе замѣчая, что

$$x'^2 + y'^2 + z'^2 = s'^2$$

и присоединяя наконецъ уравненіе (23), получаемъ слѣдующія четыре соотношенія:

$$\begin{aligned}
&\lambda(a-x)+\mu(b-y)+\nu(c-z)=0\\
&\alpha(a-x)+\beta(b-y)+\gamma(c-z)=0\\
&x''(a-x)+y''(b-y)+z''(c-z)=s'^2\\
&(a-x)^2+(b-y)^2+(c-z)^2=R^2,
\end{aligned}\tag{25}$$

изъ которыхъ можемъ опредѣлить a, b, c, R. Первыя два изъ уравненій (25) однородны относительно a-x, b-y, c-z; изъ нихъ слѣдуетъ, что упомянутыя разности пропорціональны детерминантамъ второго порядка, составленнымъ изъ элементовъ λ, μ, ν и α, β, γ; но детерминанты эти равны l, m, n (см. § 6), и слѣдовательно мы получаемъ

$$a-x=kl,\quad b-y=km,\quad c-z=kn,\tag{26}$$

гдѣ k - факторъ пропорціональности. Вставляя выраженія (26) въ третье изъ уравненій (25), получаемъ

$$kSlx''=s'^2,$$

откуда

$$k=\frac{s'^2}{Slx''}\tag{27}$$

Въ § 6 мы имѣли

$$l=\frac{s'x''-s''x'}{s'\sqrt{Sx''^2-s''^2}};$$

слѣдовательно

$$Slx''=S\frac{s'x''^2-s''x'x''}{s'\sqrt{Sx''^2-s''^2}}=\frac{s'Sx''^2-s''Sx'x''}{s'\sqrt{Sx''^2-s''^2}}$$

или, такъ какъ $Sx'x'' = s's''$, то

$$Slx'' = \frac{s' Sx''^2 - s' s''^2}{s' \sqrt{Sx''^2 - s''^2}} = \sqrt{Sx''^2 - s''^2} \qquad (28)$$

Вставляя въ формулу (27), имѣемъ

$$k = \frac{s'^2}{\sqrt{Sx''^2 - s''^2}},$$

и слѣдовательно, сравнивая съ формулой (14), получаемъ $k = \rho$ гдѣ ρ - радіусъ кривизны. Вносл значеніе k въ равенства(26), получаемъ

$$a-x = l\rho, \quad b-y = m\rho, \quad c-z = n\rho$$

или

$$a = x+l\rho, \quad b = y+m\rho, \quad c = z+n\rho .$$

Сопоставляя эти выраженія a,b,c съ равенствами (21), видимъ, что центръ нашего круга совпадаетъ съ центромъ кривизны; такъ какъ кромѣ того по самому своему опредѣленію кругъ, разсматриваемый нами, лежитъ въ соприкасающейся плоскости и проходитъ черезъ точку M данной кривой, то очевидно онъ совпадаетъ съ кругомъ кривизны. Если бы мы еще воспользовались четвертымъ изъ уравненій (25), то, по подстановкѣ въ него выраженій $a-x$, $b-y$, $c-z$, получили бы

$$R^2 = \rho^2 (l^2 + m^2 + n^2) = \rho^2 ,$$

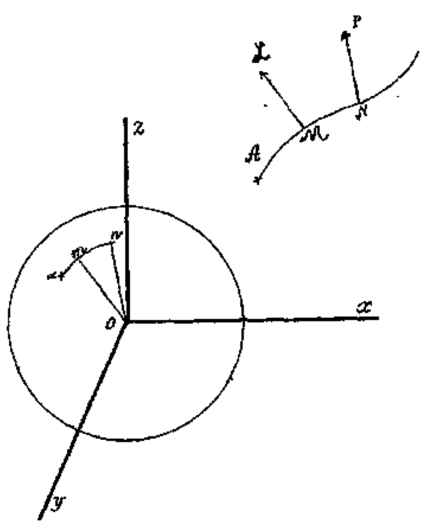
откуда $R = \rho$ (и R и ρ - существенно положительны), т. е. радіусъ круга равенъ радіусу кривизны, что впрочемъ непосредственно очевидно изъ предшествующаго.

3. КРУЧЕНІЕ (ВТОРАЯ КРИВИЗНА); ФОРМУЛЫ SERRET - FRENET.

Кривизна кривой линіи, какъ явствуетъ изъ самаго ея опредѣленія, служитъ мѣрой уклоненія кривой отъ прямой линіи (ср. гл.I). Для пространственной кривой возможно еще поставить вопросъ о степени уклоненія ея отъ плоской линіи. Изыскивая мѣру для этого уклоненія, придемъ къ понятію о такъ называемомъ к р у ч е н і и (или второй кривизнѣ) кривой.

Разсмотримъ предварительно произвольную плоскую кривую. Очевидно, что соприкасающаяся плоскость въ любой точкѣ этой кривой совпадаетъ съ плоскостью, въ которой лежитъ данная кривая. Такимъ образомъ, соприкасающаяся плоскость не измѣняетъ своего положенія при перемѣщеніи точки по плоской кривой, и слѣдовательно всѣ бинормали плоской кривой между собой параллельны.

Разсмотримъ теперь какую-нибудь пространственную кривую и возьмемъ на ней двѣ точки M и N (черт.10), соотвѣтствующія значеніямъ t и $t+\Delta t$ параметра, въ функціи котораго выражены координаты x, y, z точекъ данной кривой. Соприкасающіяся плоскости въ точкахъ M и N, вообще говоря, отличны одна отъ другой, и степень уклоненія дуги кривой MN отъ дуги плоской кривой можетъ быть охарактеризована



Черт.10.

угломъ между упомянутыми плоскостями или равнымъ ему угломъ $\Delta\psi$ между бинормалями $M\mathcal{L}$ и NP въ точкахъ M и N. Величина угла $\Delta\psi$ указываетъ, насколько кривая уклоняется, на протяженіи дуги MN, отъ соприкасающейся плоскости въ точкѣ M. Возьмемъ отношеніе угла $\Delta\psi$ къ дугѣ MN; предѣлъ этого отношенія, въ предположеніи, что точка N неограниченно приближается къ точкѣ M, называется кручені емъ (второй кривизной) кривой въ точкѣ M, а обратная величина крученія называется радіусомъ крученія (или радіусомъ второй кривизны). Выберемъ на данной кривой нѣкоторую точку A за начало счета дугъ; обозначая длину дуги AM черезъ s, а длину дуги AN - черезъ $s+\Delta s$, имѣемъ $\smile MN = \Delta s$, и слѣдовательно, если условимся обозначать крученіе черезъ T, а радіусъ крученія - черезъ r, то получаемъ

$$\mathcal{T} = \frac{1}{r} = \lim \frac{\Delta\psi}{\Delta s} \tag{1}$$

При этомъ, переходъ къ предѣлу совершаемъ, предполагая, что приращенія параметра Δt, а слѣдовательно и Δs стремятся къ нулю. Для опредѣленія угла $\Delta\psi$ между двумя бинормалями поступимъ совершенно аналогично тому, какъ поступали въ предшествующемъ параграфѣ, а именно изъ начала координатъ O опишемъ сферу радіуса = 1 и будемъ проводить радіусы Om, On... этой сферы, параллельные бинормалямъ данной кривой, притомъ въ направленіи, совпадающемъ съ положительнымъ направленіемъ каждой бинормали. Каждый изъ этихъ радіусовъ опредѣляетъ на сферѣ одну точку, напримѣръ радіусъ Om - точку m, соотвѣтствующую точкѣ М данной кривой. При перемѣщеніи точки М по данной кривой, точка m перемѣщается по сферѣ и описываетъ нѣкоторую линію, которая называется **сферической индикатрисой бинормалей** данной кривой. Координаты точки m на этой индикатрисѣ, какъ проекціи радіуса-вектора Om на оси координатъ, равны, очевидно, косинусамъ λ, μ, ν угловъ, образуемыхъ бинормалью данной кривой въ точкѣ М съ осями координатъ (такъ какъ OM = 1 и такъ какъ направленіе Om совпадаетъ съ направленіемъ бинормали). Пользуясь уравненіями данной кривой, получаемъ λ, μ, ν въ функціи параметра t; равенства, къ которымъ приходимъ

$$\lambda = \varphi_2(t), \quad \mu = \psi_2(t), \quad \nu = \chi_2(t), \qquad (2)$$

служатъ уравненіями индикатрисы. Уголъ $\Delta\psi$ бинормалей въ точкахъ М и N равенъ, очевидно, углу между радіусами Om и On или, безразлично, дугѣ большого круга, проведенной между точками m и n по нашей сферѣ радіуса = 1. Повторяя разсужденія предшествующаго параграфа относительно индикатрисы касательныхъ, докажемъ, что предѣлъ отношенія упомянутой дуги большого круга къ дугѣ Δs кривой равенъ предѣлу отношенія дуги mn индикатрисы къ той же дугѣ Δs. Такимъ образомъ, если условимся отсчитывать дуги сферической индикатрисы бинормалей отъ точки a (черт.10), соотвѣтствующей точкѣ А данной кривой, и обозначимъ дуги индикатрисы am и an соотвѣтственно черезъ σ_1 и черезъ $\sigma_1 + \Delta\sigma_1$, то равенство (1) можно замѣнить другимъ, равносильнымъ ему:

$$\mathcal{T} = \frac{1}{r} = \lim \frac{\Delta\sigma_1}{\Delta s} \qquad (3)$$

Дѣля числитель и знаменатель дроби въ равенствѣ (3) на Δt, получаемъ:

$$\mathcal{T} = \frac{1}{\tau} = \lim \frac{\frac{\Delta\sigma_1}{\Delta t}}{\frac{\Delta s}{\Delta t}} = \frac{\frac{d\sigma_1}{dt}}{\frac{ds}{dt}} = \frac{\sigma_1'}{s'} = \frac{d\sigma_1}{ds} \quad (4)$$

Крученіе, такимъ образомъ, равно отношенію производныхъ или дифференціаловъ дуги индикатрисы бинормалей и дуги данной кривой. Такъ какъ координаты точки индикатрисы равны λ, μ, ν, то

$$\sigma_1' = \sqrt{\lambda'^2 + \mu'^2 + \nu'^2} \quad (5)$$

и слѣдовательно

$$\mathcal{T} = \frac{1}{\tau} = \pm \frac{\sqrt{\lambda'^2 + \mu'^2 + \nu'^2}}{s'} = \pm \sqrt{\frac{\lambda'^2 + \mu'^2 + \nu'^2}{x'^2 + y'^2 + z'^2}} \quad (6)$$

Двойной знакъ передъ квадратнымъ радикаломъ ставимъ для того, чтобы указать на возможность какъ положительныхъ, такъ и отрицательныхъ значеній крученія, въ отличіе отъ кривизны, которую считаемъ существенно-положительной. Вопросъ о выборѣ въ каждомъ данномъ случаѣ того или другого изъ двухъ знаковъ пока оставляемъ въ сторонѣ; для разрѣшенія его слѣдовало бы преобразовать правую часть равенства (6) такъ, чтобы освободиться отъ радикала. Умножая числитель и знаменатель правой части формулы (6) на dt, можемъ ее представить еще въ слѣдующемъ видѣ:

$$\mathcal{T} = \frac{1}{\tau} = \pm \sqrt{\left(\frac{d\lambda}{ds}\right)^2 + \left(\frac{d\mu}{ds}\right)^2 + \left(\frac{d\nu}{ds}\right)^2} \quad (7)$$

Для того чтобы установить знакъ крученія и получить вмѣстѣ съ тѣмъ болѣе удобную формулу для крученія, намъ необходимо предварительно вывести весьма важныя соотношенія, извѣстныя подъ названіемъ формулъ S e r r e t - F r e n e t. Формулы эти выражаютъ производныя девяти косинусовъ α, β, γ, l, m, n, λ, μ, ν по дугѣ s въ функціи этихъ же косинусовъ и радіусовъ кривизны и крученія ϱ и r; предполагая, что координаты точекъ данной кривой выражены въ функціи параметра t, будемъ имѣть въ лѣвыхъ частяхъ формулъ отношенія дифференціаловъ косинусовъ къ дифференціалу дуги. Начнемъ выводъ формулъ Серре съ производныхъ косинусовъ α, β, γ, т.е. косинусовъ угловъ, образуемыхъ касательной съ осями координатъ.

Мы имѣли (§ 3):

$$\alpha = \frac{x'}{s'}, \quad \beta = \frac{y'}{s'}, \quad \gamma = \frac{z'}{s'} \tag{8}$$

Дифференцируя по t и дѣля на s', получаемъ:

$$\frac{\alpha'}{s'} = \frac{d\alpha}{ds} = \frac{s'x''-s''x'}{s'^3}, \quad \frac{\beta'}{s'} = \frac{d\beta}{ds} = \frac{s'y''-s''y'}{s'^3},$$

$$\frac{\gamma'}{s'} = \frac{d\gamma}{ds} = \frac{s'z''-s''z'}{s'^3}.$$

Сопоставляя съ выраженіями для косинусовъ l, m, n угловъ главной нормали съ осями (§ 6) и съ выраженіемъ радіуса кривизны ϱ (§ 7), получаемъ первую группу формулъ Серре-Френе:

$$\frac{d\alpha}{ds} = \frac{l}{\varrho}, \quad \frac{d\beta}{ds} = \frac{m}{\varrho}, \quad \frac{d\gamma}{ds} = \frac{n}{\varrho}. \tag{9}$$

Такъ какъ α, β, γ суть вмѣстѣ съ тѣмъ координаты точки на сферической индикатрисѣ касательныхъ (см. § 7) и слѣдовательно производныя α, β и γ пропорціональны косинусамъ угловъ, образуемыхъ касательной къ индикатрисѣ съ осями координатъ, то изъ формулъ (9) можно вывести слѣдующее заключеніе: касательная къ сферической индикатрисѣ касательныхъ параллельна главной нормали въ соотвѣтствующей точкѣ данной кривой.

Возводя равенство (9) въ квадратъ и складывая, получаемъ:

$$\frac{d\alpha^2 + d\beta^2 + d\gamma^2}{ds^2} = \frac{l^2 + m^2 + n^2}{\rho^2} = \frac{1}{\rho^2}$$

или, по извлеченіи корня и умноженіи на ds:

$$d\sigma = \frac{ds}{\rho} \tag{10}$$

гдѣ σ - дуга индикатрисы. Формула (10) получается также непосредственно изъ самаго опредѣленія радіуса кривизны (ср. §7) она даетъ выраженіе дифференціала дуги индикатрисы касательныхъ черезъ дифференціалъ дуги данной кривой и радіусъ кривизны.

Для того чтобы вывести вторую группу формулъ Серре-Френе, обращаемся къ соотношеніямъ (см. § 6, формулы 2):

$$\lambda^2 + \mu^2 + \nu^2 = S\lambda^2 = 1, \qquad \alpha\lambda + \beta\mu + \gamma\nu = S\alpha\lambda = 0,$$

имѣющимъ мѣсто для косинусовъ α, β, γ и λ, μ, ν угловъ образуемыхъ касательной и бинормалью съ осями координатъ. Дифференцируя эти соотношенія и дѣля на s', получаемъ:

$$S\lambda\frac{d\lambda}{ds} = 0, \qquad S\alpha\frac{d\lambda}{ds} + S\lambda\frac{d\alpha}{ds} = 0.$$

Вставляя во второе изъ этихъ равенствъ выраженія $\frac{d\alpha}{ds}$, $\frac{d\beta}{ds}$, $\frac{d\gamma}{ds}$ изъ формулъ (9), имѣемъ:

$$S\alpha\frac{d\lambda}{ds} + \frac{1}{\rho}\,Sl\lambda = S\alpha\frac{d\lambda}{ds} + \frac{1}{\rho}(l\lambda + m\mu + n\nu) = 0;$$

сумма $l\lambda + m\mu + n\nu$, какъ извѣстно, равна нулю вслѣдствіе перпендикулярности бинормали и главной нормали (см. § 6, формулы 2), и такимъ образомъ окончательно получаемъ:

$$S\lambda\frac{d\lambda}{ds} = \lambda\frac{d\lambda}{ds} + \mu\frac{d\mu}{ds} + \nu\frac{d\nu}{ds} = 0$$

$$S\alpha\frac{d\lambda}{ds} = \alpha\frac{d\lambda}{ds} + \beta\frac{d\mu}{ds} + \gamma\frac{d\nu}{ds} = 0 \qquad (11)$$

Равенства (11) можно разсматривать какъ линейныя однородныя уравненія относительно неизвѣстныхъ $\frac{d\lambda}{ds}$, $\frac{d\mu}{ds}$, $\frac{d\nu}{ds}$; слѣдовательно эти производныя пропорціональны детерминантамъ второго порядка, составленнымъ изъ элементовъ λ, μ, ν, α, β, γ. Такъ какъ съ другой стороны эти детерминанты равны соотвѣтственно l, m, n (см. § 6, формулы 3), то получаемъ:

$$\frac{d\lambda}{ds} = kl, \quad \frac{d\mu}{ds} = km, \quad \frac{d\nu}{ds} = kn \qquad (12)$$

гдѣ k - факторъ пропорціональности. Возводя равенства (12) въ квадратъ и складывая, получаемъ:

$$\left(\frac{d\lambda}{ds}\right)^2 + \left(\frac{d\mu}{ds}\right)^2 + \left(\frac{d\nu}{ds}\right)^2 = k^2(l^2 + m^2 + n^2) = k^2,$$

или, сопоставляя съ формулой (7): $k^2 = \frac{1}{r^2}$,

гдѣ r - радіусъ крученія. Извлекая изъ двухъ частей квадратный корень, имѣемъ:

$$k = \pm\frac{1}{r}, \qquad (13)$$

при чемъ въ лѣвой части имѣемъ количество вполнѣ опредѣленное и по величинѣ и по знаку (<u>k</u> опредѣляется любымъ изъ равенствъ 12), а въ правой части входитъ радіусъ крученія r, знакъ котораго у насъ пока не установленъ. Условимся въ равенствѣ (13) всегда брать верхній знакъ (+); этимъ самымъ мы устанавливаемъ знакъ радіуса крученія и такимъ образомъ дополняемъ опредѣленіе крученія, данное въ началѣ параграфа. Равенство (13) принимаетъ видъ $k = \frac{1}{r}$, и изъ формулъ (12) получаемъ, по подстановкѣ значенія k:

$$\frac{d\lambda}{ds} = \frac{l}{r}, \quad \frac{d\mu}{ds} = \frac{m}{r} \quad \frac{d\nu}{ds} = \frac{n}{r} \tag{14}$$

Равенства (14) образуютъ вторую группу формулъ Серре-Френе. Такъ какъ λ, μ, ν равны координатамъ точки на сферической индикатрисѣ бинормалей, то изъ формулъ (14) непосредственно заключаемъ, что касательная къ сферической индикатрисѣ бинормалей параллельна главной нормали въ соотвѣтствующей точкѣ данной кривой. Для доказательства стоитъ лишь повторить разсужденія, приведенныя выше по поводу первой группы формулъ Серре-Френе. Для дифференціала дуги σ_1 индикатрисы бинормалей имѣемъ выраженіе

$$d\sigma_1 = \frac{ds}{r} \tag{15}$$

непосредственно вытекающее изъ основной формулы (4) для крученія. Слѣдуетъ однако замѣтить, что при этомъ, въ отличие отъ обычнаго нашего условія, мы должны въ выраженіи дифференціала дуги индикатрисы черезъ производныя координатъ

$$d\sigma_1 = \pm\sqrt{\lambda'^2 + \mu'^2 + \nu'^2}\,.dt$$

допускать передъ радикаломъ тотъ или иной изъ двухъ знаковъ, такъ какъ радіусъ крученія, входящій въ равенство (15), можетъ быть и положительнымъ и отрицательнымъ, и слѣдовательно знакъ $d\sigma$ можетъ или совпадать со знакомъ dt, съ которымъ совпадаетъ знакъ ds, или быть ему противоположнымъ. Если бы мы пожелали сохранить неизмѣннымъ наше общее условіе относительно знака дифференціала дуги, то равенство (15) пришлось бы замѣнить равенствомъ

$$d\sigma = \frac{ds}{|r|} \tag{16}$$

гдѣ черезъ $|r|$ обозначена абсолютная величина r.

Обращаемся наконецъ къ выводу третьей группы формулъ Серре-Френе. Для этой цѣли продифференцируемъ соотношенія:

$$S l^2 = 1, \qquad S\alpha l = 0, \qquad S l\lambda = 0$$

(см. § 6, формулы 2), при чемъ получаемъ:

$$S l \frac{dl}{ds} = 0,\ S\alpha \frac{dl}{ds} + S l \frac{d\alpha}{ds} = 0,\ S\lambda \frac{dl}{ds} + S l \frac{d\lambda}{ds} = 0 \tag{17}$$

Пользуясь формулами (9) и (14), имѣемъ:

$$S l \frac{d\alpha}{ds} = \frac{1}{\rho}\ S l^2 = \frac{1}{\rho}\left(l^2 + m^2 + n^2\right) = \frac{1}{\rho}$$

$$S l \frac{d\lambda}{ds} = \frac{1}{r}\ S l^2 = \frac{1}{r}\left(l^2 + m^2 + n^2\right) = \frac{1}{r}\,.$$

Вставляя полученныя значенія суммъ $S l\frac{d\alpha}{ds}$ и $S l\frac{d\lambda}{ds}$ во второе и третье изъ равенствъ (17) и перенося эти члены въ правыя части, имѣемъ окончательно:

$$S\alpha \frac{dl}{ds} = \alpha\frac{dl}{ds} + \beta\frac{dm}{ds} + \gamma\frac{dn}{ds} = -\frac{1}{\rho}$$

$$S l \frac{dl}{ds} = l\frac{dl}{ds} + m\frac{dm}{ds} + n\frac{dn}{ds} = 0$$

$$S\lambda\frac{dl}{ds}=\lambda\frac{dl}{ds}+\mu\frac{dm}{ds}+\nu\frac{dn}{ds}=-\frac{1}{\tau} \tag{18}$$

Умножая первое уравненіе на α, второе на l, третье на λ и складывая, получаемъ:

$$(\alpha^2+l^2+\lambda^2)\frac{dl}{ds}+(\alpha\beta+lm+\lambda\mu)\frac{dm}{ds}+(\gamma\alpha+nl+\nu\lambda)\frac{dn}{ds}=$$
$$=-\frac{\alpha}{\rho}-\frac{\lambda}{\tau},$$

или, такъ какъ

$$\alpha^2+l^2+\lambda^2=1,\quad \alpha\beta+lm+\lambda\mu=0,\quad \gamma\alpha+nl+\nu\lambda=0$$

(См. § 6, формулы 2), то окончательно

$$\frac{dl}{ds}=-\frac{\alpha}{\rho}-\frac{\lambda}{\tau} \tag{19}$$

Аналогично получимъ:

$$\frac{dm}{ds}=-\frac{\beta}{\rho}-\frac{\mu}{\tau};\quad \frac{dn}{ds}=-\frac{\gamma}{\rho}-\frac{\nu}{\tau}. \tag{20}$$

Равенства (19) и (20) образуютъ третью группу формулъ Серре--Френе.

Выписывая изъ каждой группы формулъ (равенства 9, 14, 19) первую формулу, получаемъ три равенства

$$\frac{d\alpha}{ds}=\frac{l}{\rho},\quad \frac{dl}{ds}=-\frac{\alpha}{\rho}-\frac{\lambda}{\tau},\quad \frac{d\lambda}{ds}=\frac{l}{\tau}, \tag{21}$$

въ которыя входятъ только три косинуса α, l, λ. Совершая круговую перестановку буквъ, получимъ еще двѣ группы равенствъ, по три въ каждомъ, аналогичныя группѣ равенствъ (21); вторая изъ нихъ содержитъ косинусы β, m, μ, а третья - косинусы γ, n, ν. Совокупность всѣхъ этихъ равенствъ исчерпываетъ девять формулъ Серре-Френе.

Вводя снова вмѣсто $d\alpha$, dl, $d\lambda$, ds ихъ выраженія изъ равенствъ:

$$d\alpha = \alpha' dt, \quad dl = l' dt, \quad d\lambda = \lambda' dt, \quad ds = s' dt,$$

можемъ переписать формулы (21) еще въ слѣдующемъ видѣ:

$$\frac{\alpha'}{s'} = \frac{l}{\rho}, \quad \frac{l'}{s'} = -\frac{\alpha}{\rho} - \frac{\lambda}{\tau}, \quad \frac{\lambda'}{s'} = \frac{l}{\tau}, \tag{22}$$

гдѣ акцентами обозначены дифференцированія по параметру t. Остальныя шесть формулъ Серре-Френе получаются изъ равенствъ (22) круговой замѣной буквъ.

Мы имѣемъ теперь возможность вывести формулу для крученія, свободную отъ радикаловъ. Для этой цѣли обратимся къ формуламъ (8), изъ которыхъ

$$x' = \alpha s', \quad y' = \beta s', \quad z' = \gamma s'. \tag{23}$$

Дифференцируя 1-ое равенство по t и принимая во вниманіе 1-ое изъ равенствъ (22), имѣемъ:

$$x'' = \frac{s'^2}{\rho} \cdot l + s'' \cdot \alpha \tag{24}$$

Дифференцируя еще разъ по t и пользуясь равенствами (22), получаемъ:

$$x''' = -\frac{s'^3}{\tau\rho} \cdot \lambda + \left[s''' - \frac{s'^3}{\rho^2}\right] \cdot \alpha + \left[\frac{s''s'}{\rho} + \left(\frac{s'^2}{\rho}\right)'\right] \cdot l \tag{25}$$

Поступая аналогично со 2-мъ и 3-мъ изъ равенствъ (23), получаемъ равенства, которыя могутъ быть получены изъ равенствъ (24) и (25) круговой замѣной буквъ. Въ результатѣ мы выразили производныя x, y, z до 3-го порядка черезъ 9 косинусовъ α, β, γ, l, m, n, λ, μ, ν.

Умножая равенство (25) и два другихъ, получаемыхъ изъ него круговой замѣной буквъ на λ, μ, ν и складывая, имѣемъ

$$S\lambda x''' = -\frac{s'^3}{r\rho} . \tag{26}$$

Внося сюда выраженія λ, μ, ν (§ 5) и радіуса кривизны ρ (§ 7, форм.15), получаемъ для крученія $\frac{1}{r}$ выраженіе:

$$\frac{1}{r} = \frac{-Sx'''(y'z''-y''z')}{S(y'z''-y''z')^2} .$$

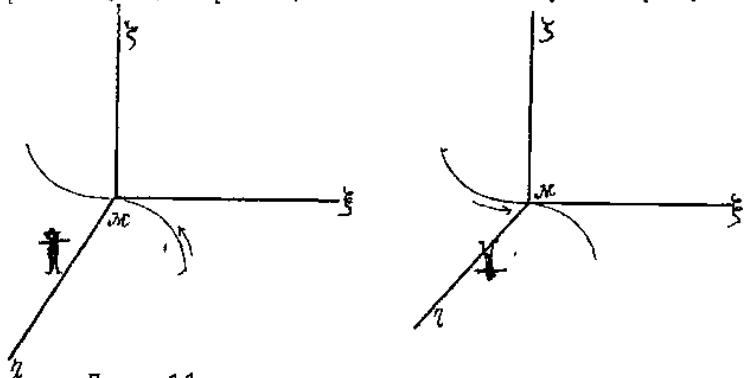
Легко усмотрѣть, что сумма, находящаяся въ числителѣ правой части предшествующаго равенства, можетъ быть представлена въ видѣ детерминанта

$$\begin{vmatrix} x' & y' & z' \\ x'' & y'' & z'' \\ x''' & y''' & z''' \end{vmatrix} ; \tag{27}$$

въ самомъ дѣлѣ, разлагая этотъ детерминантъ по элементамъ послѣдней строки, получаемъ именно ту сумму, о которой идетъ рѣчь. Такимъ образомъ мы получаемъ слѣдующее выраженіе для крученія пространственной кривой:

$$\frac{1}{r} = -\frac{\begin{vmatrix} x' & y' & z' \\ x'' & y'' & z'' \\ x''' & y''' & z''' \end{vmatrix}}{S(y'z''-y''z')^2} \tag{28}$$

Полученная формула не содержитъ радикаловъ и опредѣляетъ крученіе какъ по абсолютной величинѣ, такъ и по знаку; притомъ, такъ какъ знаменатель равенъ суммѣ квадратовъ и слѣдовательно существенно положителенъ, то знакъ крученія обратенъ знаку детерминанта (27), который намъ уже приходилось разсматривать въ параграфѣ 5-мъ. Мы показали тамъ, что точка, перемѣщающаяся по данной кривой въ положительномъ направленіи, въ зависимости отъ того или другого знака детерминанта (27), переходитъ или съ отрицательной стороны соприкасающейся плоскости на положительную, или наоборотъ. Такимъ образомъ можемъ сказать, что при положительномъ крученіи кривая переходитъ съ положительной стороны соприкасающейся плоскости на отрицательную, при отрицательномъ - наоборотъ. Вообразимъ себѣ наблюдателя, находящагося на главной нормали (см. черт.11) въ положительную сторону отъ точ-



Черт.11.

ки М кривой, притомъ обращеннаго лицомъ къ точкѣ М и стоящаго параллельно бинормали. Для такого наблюдателя движеніе точки, поднимающейся в в е р х ъ по кривой, въ смежности съ точкой М, будетъ совершаться въ первомъ случаѣ с п р а в а н а л ѣ в о, притомъ независимо отъ того, куда обращенъ головой наблюдатель - въ положительную или отрицательную сторону по бинормали. Наоборотъ, во второмъ случаѣ (при отрицательномъ крученіи) для того же наблюдателя движеніе той же точки будетъ совершаться с л ѣ в а н а п р а в о. Такъ какъ въ смежности съ точкой M кривая находится въ сторону положительной главной нормали отъ спрямляющей плоскости $\xi\zeta$ (черт.11), то она какъ бы закручивается кругомъ вышеупомянутаго наблюдателя, и можно сказать, что при положительномъ крученіи кривая закручивается с п р а в а н а л ѣ в о, а при отрицательномъ - с л ѣ в а н а п р а в о, если условимся разсматривать то направленіе на кривой, при которомъ движущаяся точка представляется наблюдателю поднимающейся в в е р х ъ (въ смежности съ точкой M).

Мы вывели такимъ образомъ критерій, который легко позволяетъ опредѣлять знакъ крученія въ произвольной точкѣ кривой. Замѣтимъ при этомъ, что критерій нашъ вовсе не зависитъ отъ выбора положительнаго направленія на касательной кривой (на оси ξ чертежа 11), такъ какъ положеніе наблюдателя опредѣляется положительнымъ направленіемъ главной нормали, которое совершенно не зависитъ отъ того, какое направленіе на касательной выберемъ за положительное, и всецѣло характеризуется расположеніемъ кривой въ смежности съ точкой M (см. § 6). Въ этомъ заключается существенное преимущество вновь введеннаго критерія надъ тѣмъ, который непосредственно слѣдуетъ изъ результатовъ параграфа 5-го относительно знака детерминанта (27); въ самомъ дѣлѣ, положительное направленіе кривой, которое входило въ наши прежнія соображенія, есть направленіе возрастанія параметра t и слѣдовательно можетъ мѣняться съ введеніемъ новаго параметра; такимъ образомъ мы избавились теперь отъ тѣхъ элементовъ случайности, которые вноситъ выборъ параметра и видимъ, что знакъ крученія зависитъ лишь отъ вида самой кривой и нисколько не зависитъ отъ той формы, въ которой даны ея уравненія.

Возвращаясь къ формулѣ (28), можемъ представить ее въ нѣсколько иномъ видѣ, пользуясь формулой для радіуса кривизны ρ (§ 7, формула 15). Опредѣляя изъ этой послѣдней сумму $S(y'z'' - y''z')^2$ и подставляя, получаемъ въ результатѣ:

$$\frac{1}{\tau} = -\frac{\rho^2}{s'^2}\begin{vmatrix} x' & y' & z' \\ x'' & y'' & z'' \\ x''' & y''' & z''' \end{vmatrix} \qquad (29)$$

Въ частности, если параметръ t равенъ дугѣ s, то $s' = 1$ и слѣдовательно

$$\frac{1}{\tau} = -\rho^2\begin{vmatrix} x' & y' & z' \\ x'' & y'' & z'' \\ x''' & y''' & z''' \end{vmatrix} \qquad (30)$$

Въ началѣ настоящаго параграфа мы показали, что всѣ бинормали плоской кривой параллельны между собою. Отсюда заключаемъ, что уголъ $\Delta\psi$ бинормалей въ двухъ безконечно-близкихъ точкахъ плоской кривой всегда равенъ нулю и слѣдовательно крученіе, какъ предѣлъ отношенія этого угла къ дугѣ, тождественно равно нулю для всѣхъ точекъ плоской кривой.

Докажемъ обратно, что если крученіе исчезаетъ для всѣхъ точекъ данной кривой, то кривая эта плоская. Обращаясь къ формулѣ (28), видимъ, что $\frac{1}{r} = 0$, если имѣетъ мѣсто равенство

$$\begin{vmatrix} x' & y' & z' \\ x'' & y'' & z'' \\ x''' & y''' & z''' \end{vmatrix} = 0 \qquad (31)$$

При этомъ необходимо допустить, что въ числѣ трехъ миноровъ 2-го порядка, соотвѣтствующихъ элементамъ послѣдней строки опредѣлителя въ лѣвой части равенства (31), есть по крайней мѣрѣ одинъ, отличный отъ нуля. Въ самомъ дѣлѣ, знаменатель выраженія (29) равенъ суммѣ квадратовъ упомянутыхъ миноровъ, и слѣдовательно при одновременномъ исчезаніи всѣхъ трехъ миноровъ крученіе $\frac{1}{r}$ было бы неопредѣленнымъ. Въ § 7 мы показали, что три равенства

$$x'y'' - x''y' = 0, \quad y'z'' - y''z' = 0, \quad z'x'' - z''x' = 0$$

одновременно имѣютъ мѣсто во всѣхъ точкахъ линіи только въ томъ случаѣ, если эта линія - прямая. Такимъ образомъ, предполагая, что имѣемъ дѣло съ кривой линіей, мы должны допустить, что по крайней мѣрѣ одинъ изъ вышеупомянутыхъ миноровъ не исчезаетъ тождественно для всѣхъ точекъ кривой. Пусть такимъ свойствомъ обладаетъ миноръ, соотвѣтствующій элементу z'''; если бы наоборотъ оказалось, что этотъ миноръ тождественно равенъ нулю, а отличенъ отъ нуля какой-либо изъ 2-хъ остальныхъ миноровъ, то, измѣняя названія осей, мы всегда бы привели этотъ случай къ предшествующему. Итакъ допустимъ, что

$$\begin{vmatrix} x'y' \\ x''y'' \end{vmatrix} \neq 0$$

и разложимъ опредѣлитель, находящійся въ лѣвой части равенства (31), по элементамъ послѣдней строки; при этомъ получимъ

$$x''' \begin{vmatrix} y'z' \\ y''z'' \end{vmatrix} + y'' \begin{vmatrix} z'x' \\ z''x'' \end{vmatrix} + z''' \begin{vmatrix} x'y' \\ x''y'' \end{vmatrix} = 0.$$

Перенося первые два члена въ правую часть равенства и дѣля на коэффиціентъ при z''', завѣдомо отличный отъ нуля по нашему предположенію, получаемъ

$$z''' = Ax''' + By''' \qquad (32)$$

гдѣ черезъ A и B обозначены взятыя со знакомъ минусъ отношенія перваго и второго миноровъ къ третьему. Замѣняя въ опредѣлителѣ, находящемся въ лѣвой части равенства (31), элементы третьей строки элементами сначала второй, а потомъ первой строки, получаемъ тождественно исчезающіе опредѣлители:

$$\begin{vmatrix} x' & y' & z' \\ x'' & y'' & z'' \\ x'' & y'' & z'' \end{vmatrix} \quad \text{и} \quad \begin{vmatrix} x' & y' & z' \\ x'' & y'' & z'' \\ x' & y' & z' \end{vmatrix}$$

Разлагая ихъ по элементамъ послѣднихъ строкъ и поступая далѣе такъ же, какъ поступали выше, получаемъ два равенства:

$$\begin{aligned} z'' &= Ax'' + By'' \\ z' &= Ax' + By' \end{aligned} \qquad (33)$$

Дифференцируя первое изъ нихъ по t, получаемъ

$$z''' = Ax''' + By''' + A'x'' + B'y''$$

или, принимая во вниманіе равенство (32):

$$A'x'' + B'y'' = 0, \tag{34}$$

Точно такъ же, дифференцируя по t второе изъ равенствъ (33) и принимая во вниманіе первое изъ нихъ, получаемъ:

$$A'x' + B'y' = 0 \tag{35}$$

Уравненія (34) и (35) можно разсматривать какъ линейныя однородныя относительно неизвѣстныхъ A' и B'; детерминантъ системы

$$\begin{vmatrix} x' & y' \\ x'' & y'' \end{vmatrix}$$

по условію отличенъ отъ нуля; слѣдовательно имѣемъ:

$$A' = 0, \quad B' = 0,$$

откуда заключаемъ, что A и B - постоянныя. Имѣя это въ виду, можемъ второе изъ равенствъ (33) написать въ слѣдующемъ видѣ:

$$\frac{d}{dt}(z - Ax - By) = 0,$$

откуда непосредственно слѣдуетъ $z - Ax - By = C$

$$\text{или} \quad z = Ax + By + C \tag{36}$$

гдѣ C - постоянное.

Уравненіе (36) есть уравненіе плоскости, и мы видимъ такимъ образомъ, что всѣ точки данной кривой лежатъ въ одной плоскости, т.е. кривая эта есть плоская кривая.

9. ПРИЛОЖЕНІЕ ОБЩИХЪ ФОРМУЛЪ КЪ ЧАСТНЫМЪ ПРИМѢРАМЪ; ВИНТОВАЯ ЛИНІЯ.

Мы вывели цѣлый рядъ общихъ формулъ, которыя можемъ непосредственно прилагать къ изслѣдованію любой кривой. Формулы эти содержатъ производныя различныхъ порядковъ по параметру t; замѣтимъ, что всѣ ихъ можно преобразовать такъ, чтобы вмѣсто производныхъ входили дифференціалы; для этого стоитъ лишь числитель и знаменатель каждой формулы умножить на подходящую степень дифференціала параметра t и имѣть въ виду равенства

$$dx = x'dt, \quad d^2x = x''dt^2, \quad d^3x = x'''dt^3$$

и имъ аналогичныя. Такъ, умножая числитель и знаменатель выраженія λ (§ 5) на dt^3, получаемъ:

$$\lambda = \frac{dy.d^2z - d^2y.dz}{ds\sqrt{d^2x^2 + d^2y^2 + d^2z^2 - d^2s^2}}.$$

Равнымъ образомъ, умножая на dt^3 числитель и знаменатель выраженія l (§ 6), имѣемъ:

$$l = \frac{ds.d^2x - d^2s.dx}{ds\sqrt{d^2x^2 + d^2y^2 + d^2z^2 - d^2s^2}}.$$

Выраженія для μ, ν и для m, n получаются изъ выраженій λ и l круговой замѣной буквъ x, y, z. Умножая на dt^2 числитель и знаменатель выраженія $\frac{1}{\rho}$ (§ 7, форм.14), получаемъ:

$$\frac{1}{\rho} = \frac{\sqrt{d^2x^2 + d^2y^2 + d^2z^2 - d^2s^2}}{ds^2}.$$

Наконецъ, умножая на dt^5 числитель и знаменатель выраженія $\frac{1}{r}$ (§ 8, форм.28), имѣемъ:

$$\frac{1}{r} = - \frac{\begin{vmatrix} dx & dy & dz \\ d^2x & d^2y & d^2z \\ d^3x & d^3y & d^3z \end{vmatrix}}{S\,(dyd^2z - d^2ydz)^2}$$

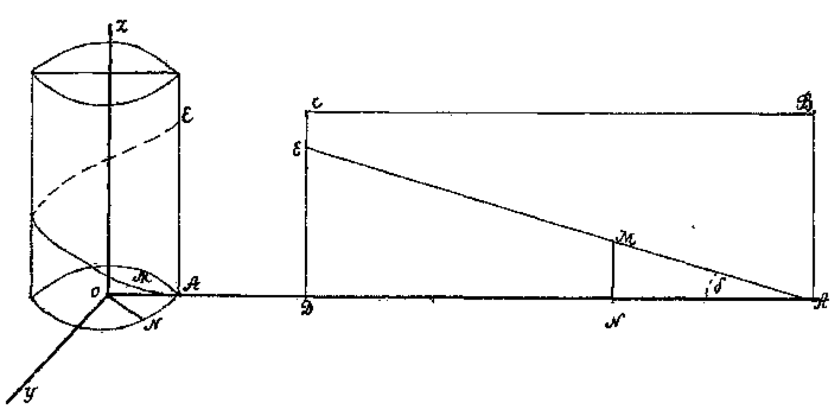
Формулы, полученныя нами, удобно примѣняются въ томъ случаѣ, когда кривая опредѣляется двумя уравненіями вида

$$F(x,y,z) = 0, \qquad \varphi(x,y,z) = 0.$$

Дифференцируя эти уравненія одинъ, два и три раза, придемъ къ соотношеніямъ, помощью которыхъ можемъ исключить всѣ дифференціалы координатъ x, y, z, входящіе въ общія формулы. При этомъ слѣдуетъ еще имѣть въ виду, что

$$ds^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2; \qquad dsd^2s = dxd^2x + dyd^2y + dzd^2z.$$

Обращаемся къ разсмотрѣнію частнаго примѣра, а именно изслѣдуемъ такъ называемую **винтовую линію**. Предположимъ, что имѣемъ круглый цилиндръ (см. черт.12) и



Черт.12.

плоскость, на которой проведена прямая линія AE. Будемъ эту плоскость навертывать на боковую поверхность цилиндра; тогда прямая AE обращается въ нѣкоторую линію на поверхности цилиндра, которая и есть в и н т о в а я линія.

Для большаго удобства мы можемъ разсматривать на плоскости прямоугольникъ ABCD, представляющій развернутую боковую поверхность цилиндра. Этотъ прямоугольникъ мы навертываемъ на цилиндръ такъ, чтобы основаніе его AB обратилось въ окружность основанія цилиндра; при этомъ прямая AE, проведенная подъ угломъ δ къ прямой AB, обращается въ винтовую линію AME на поверхности цилиндра (черт.12). Само собою разумѣется, что мы получаемъ, такимъ образомъ, лишь одинъ ходъ винтовой линіи, которая, очевидно, есть линія безконечная, какъ и та прямая, изъ которой она получена. Изъ самаго образованія винтовой линіи очевидно, что кратчайшее разстояніе между двумя точками на поверхности цилиндра получимъ, проводя черезъ нихъ винтовую линію; такимъ образомъ винтовая линія есть такъ называемая г е о д е з и ч е с к ая линія на поверхности цилиндра.

Чтобы получить уравненія винтовой линіи въ возможно болѣе простомъ видѣ, выберемъ оси координатъ такъ, чтобы ось z совпадала съ осью цилиндра (см. черт.12), а ось x проходила черезъ точку A винтовой линіи. При этомъ начало координатъ помѣщается въ центрѣ круга - основанія цилиндра, на окружность котораго наматывается основаніе AB прямоугольника ABCD (черт.12); радіусъ этого круга (радіусъ цилиндра) обозначимъ черезъ a. Разсмотримъ точку M винтовой линіи: координата z этой точки равна отрѣзку образующей NM, которій на плоскости служитъ катетомъ прямоугольнаго треугольника AMN. Въ этомъ треугольникѣ одинъ изъ острыхъ угловъ равенъ δ, а катетъ AN равенъ дугѣ AN окружности основанія. Обозначая уголъ AON черезъ φ, имѣемъ такимъ образомъ $AN = a\varphi$, и слѣдовательно

$$z = AN.\,tg\delta = a\,tg\delta.\varphi \qquad (1)$$

Координаты x, y точки M винтовой линіи совпадаютъ съ координатами ея проекціи N на плоскость xy.

Такъ какъ радіусъ-векторъ этой послѣдней точки равенъ a и образуетъ уголъ φ съ осью X, то

$$x = a\cos\varphi\,, \qquad y = a\sin\varphi \qquad (2)$$

Сопоставляя равенства (1) и (2), получаемъ три уравненія винтовой линіи

$$x = a\cos\varphi\,, \quad y = a\sin\varphi\,, \quad z = a\,tg\delta.\varphi\,, \qquad (3)$$

выражающія x, y, z въ функціи произвольнаго параметра φ. Дифференцируя уравненія (3), имѣемъ

$$dx = -a\sin\varphi\, d\varphi, \quad dy = a\cos\varphi\, d\varphi, \quad dz = a\,tg\delta.d\varphi,$$

и слѣдовательно

$$ds = \sqrt{a^2\sin^2\varphi + a^2\cos^2\varphi + a^2 tg^2\delta}\,.\,d\varphi = \sqrt{a^2(1+tg^2\delta)}\,.\,d\varphi =$$

$$= a\sec\delta.\,d\varphi \qquad (4)$$

Передъ радикаломъ мы взяли, какъ всегда, знакъ +; слѣдовательно за положительное направленіе отсчета дугъ мы приняли направленіе возрастанія угла φ. Выберемъ за начало дугъ точку A, соотвѣтствующую значенію $\varphi = 0$; тогда, интегрируя равенство (4), получаемъ

$$s = a\sec\delta \cdot \varphi \tag{5}$$

откуда

$$\varphi = \frac{s}{a\sec\delta} = \frac{\cos\delta}{a} \cdot s \tag{6}$$

Вставляя значенiе φ въ уравненiя (3), мы выразимъ координаты x, y, z въ функцiи дуги s. Мы не будемъ выполнять на самомъ дѣлѣ этой подстановки, но будемъ во всемъ дальнѣйшемъ считать φ функцiей s, опредѣляемой равенствомъ (6). Произвольная функцiя f отъ φ въ этомъ предположенiи является функцiей отъ s, и мы имѣемъ вообще:

$$\frac{df}{ds} = \frac{df}{d\varphi} \cdot \frac{d\varphi}{ds} = \frac{\cos\delta}{a} \cdot \frac{df}{d\varphi} \tag{7}$$

Примѣняя общую формулу (7), имѣемъ для косинусовъ угловъ, образуемыхъ касательной съ осями координатъ (см. § 3):

$$\begin{aligned} \alpha &= \frac{dx}{ds} = -a\sin\varphi \cdot \frac{\cos\delta}{a} = -\cos\delta \cdot \sin\varphi \\ \beta &= \frac{dy}{ds} = a\cos\varphi \cdot \frac{\cos\delta}{a} = +\cos\delta \cdot \cos\varphi \\ \gamma &= \frac{dz}{ds} = a\,tg\delta \cdot \frac{\cos\delta}{a} = \sin\delta \end{aligned} \tag{8}$$

Мы видимъ, что γ = const.; слѣдовательно касательная образуетъ постоянный уголъ съ осью z, а также и съ образующими цилиндра, которыя параллельны оси z; такимъ образомъ, можемъ сказать, что винтовая линiя пересѣкаетъ образующiя цилиндра подъ постояннымъ угломъ.

Дифференцируя равенства (8) по s и пользуясь формулой (7), получаемъ вторыя производныя:

$$\frac{d^2x}{ds^2} = -\cos\delta \cdot \cos\varphi \frac{\cos\delta}{a} = -\frac{\cos^2\delta}{a} \cdot \cos\varphi$$

$$\frac{d^2y}{ds^2} = -\cos\delta \cdot \sin\varphi \frac{\cos\delta}{a} = -\frac{\cos^2\delta}{a} \cdot \sin\varphi \quad . \qquad (9)$$

$$\frac{d^2z}{ds^2} = 0$$

Наконецъ, дифференцируя еще разъ, имѣемъ:

$$\frac{d^3x}{ds^3} = +\frac{\cos^2\delta}{a} \cdot \sin\varphi \cdot \frac{\cos\delta}{a} = \frac{\cos^3\delta}{a^2} \cdot \sin\varphi$$

$$\frac{d^3y}{ds^3} = -\frac{\cos^2\delta}{a} \cdot \cos\varphi \cdot \frac{\cos\delta}{a} = -\frac{\cos^3\delta}{a^2} \cdot \cos\varphi \qquad (10)$$

$$\frac{d^3z}{ds^3} = 0$$

Вставляя выраженія (9) въ формулу (16) параграфа 7, получаемъ:

$$\frac{1}{\rho} = \sqrt{\left(\frac{\cos^2\delta}{a}\right)^2 \cdot (\cos^2\varphi + \sin^2\varphi)} = \frac{\cos^2\delta}{a},$$

откуда

$$\rho = a\sec^2\delta \qquad (11)$$

Такимъ образомъ радіусъ кривизны винтовой линіи имѣетъ постоянную величину во всѣхъ точкахъ кривой. Подставляя значенія (9) вторыхъ производныхъ въ формулы параграфа 6-го, получаемъ:

$$l = -a\sec^2\delta \cdot \frac{\cos^2\delta}{a} \cdot \cos\varphi = -\cos\varphi$$

$$m = -a\sec^2\delta \cdot \frac{\cos^2\delta}{a} \cdot \sin\varphi = -\sin\varphi \qquad (12)$$

$$n = 0$$

Послѣднее изъ равенствъ (12) показываетъ, что главная нормаль перпендикулярна оси z; изъ первыхъ двухъ заключаемъ, что она параллельна радiусу ON (черт.12) цилиндра. Знаки минусъ передъ $\cos\varphi$ и $\sin\varphi$ указываютъ на то, что положительное направленiе главной нормали противоположно положительному направленiю радiуса ON; такимъ образомъ, положительная главная нормаль направлена отъ точки M къ оси цилиндра, которую она, очевидно, пересѣкаетъ (см. черт.12). Вставляемъ наконецъ значенiя производныхъ перваго, второго и третьяго порядковъ (формулы 8,9,10) и значенiя c (формула 11) въ формулу (30) параграфа 8-го. Въ результатѣ имѣемъ:

$$\frac{1}{r} = -a^2\sec^4\delta \begin{vmatrix} -\cos\delta.\sin\varphi, & \cos\delta.\cos\varphi, & \sin\delta \\ -\dfrac{\cos^2\delta}{a}.\cos\varphi, & -\dfrac{\cos^2\delta}{a}.\sin\varphi, & 0 \\ \dfrac{\cos^3\delta}{a^2}.\sin\varphi, & -\dfrac{\cos^3\delta}{a^2}.\cos\varphi, & 0 \end{vmatrix}$$

или, разлагая опредѣлитель по элементамъ послѣдняго столбца:

$$\frac{1}{r} = -a^2\sec^4\delta.\sin\delta \begin{vmatrix} -\dfrac{\cos^2\delta}{a}.\cos\varphi, & -\dfrac{\cos^2\delta}{a}.\sin\varphi \\ \dfrac{\cos^3\delta}{a^2}.\sin\varphi, & -\dfrac{\cos^3\delta}{a^2}.\cos\varphi \end{vmatrix} =$$

$$= -a^2\sec^4\delta.\sin\delta.\frac{\cos^2\delta}{a}.\frac{\cos^3\delta}{a^2}(\cos^2\varphi+\sin^2\varphi) = -\frac{\sin\delta.\cos\delta}{a}$$

откуда:

$$r = -\frac{a}{\sin\delta\cos\delta} \qquad (13)$$

Мы видимъ такимъ образомъ, что винтовая линія есть кривая постоянной кривизны и постояннаго крученія. Знакъ минусъ въ формулѣ (13) указываетъ, что для остраго угла δ крученіе винтовой линіи отрицательно и слѣдовательно винтовая линія закручивается слѣва направо для наблюдателя, расположеннаго такъ, какъ было указано въ § 8; въ данномъ случаѣ этотъ наблюдатель можетъ быть поставленъ по направленію оси цилиндра. Если бы уголъ δ былъ тупой, то косинусъ его былъ бы отрицателенъ и слѣдовательно крученіе было бы положительно; винтовая линія въ этомъ случаѣ закручивалась бы справа налѣво.

ГЛАВА III.

ТЕОРІЯ ПОВЕРХНОСТЕЙ.

****

ВВЕДЕНІЕ.

Поверхность, какъ извѣстно изъ аналитической геометріи, опредѣляется однимъ уравненіемъ

$$F(x,y,z) = 0 \qquad (1)$$

въ Декартовыхъ координатахъ (во всемъ дальнѣйшемъ, какъ и въ главѣ II, будемъ въ частности предполагать систему координатъ прямоугольной). Разрѣшая уравненіе (1)относительно z, имѣемъ

$$z = f(x,y); \qquad (2)$$

этотъ видъ уравненія поверхности представляетъ значительныя удобства для изслѣдованія, и мы часто имъ будемъ пользоваться. При этомъ однако исключаются изъ разсмотрѣнія всѣ поверхности, уравненія которыхъ не могутъ быть разрѣшены относительно z. Очевидно, что подобный случай имѣетъ мѣсто тогда, когда уравненіе (1) вовсе не содержитъ координаты z. Такимъ образомъ, пользуясь уравненіемъ вида (2), мы исключаемъ изъ разсмотрѣнія поверхности, опредѣляемыя уравненіями вида

$$F(x,y) = 0, \qquad (3)$$

т.е. цилиндрическія поверхности, образующія которыхъ параллельны оси z.

Относительно функцій F и f, входящихъ въ уравненія (1) и (2), будемъ предполагать, что онѣ допускаютъ конечныя, непрерывныя производныя по крайней мѣрѣ первыхъ трехъ порядковъ. Для частныхъ производныхъ первыхъ двухъ порядковъ функціи f по перемѣннымъ x, y будемъ во всемъ дальнѣйшемъ употреблять сокращенныя обозначенія Монжа, полагая

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial x} = p \; , \; \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{\partial f}{\partial y} = q \tag{4}$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = r \; , \; \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = s \; , \; \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = t$$

Поверхность возможно еще опредѣлить помощью трехъ уравненій вида

$$x = \varphi(u,v), \quad y = \psi(u,v), \quad z = f(u,v) \tag{5}$$

выражающихъ координаты x, y, z въ функціи двухъ произвольныхъ параметровъ u, v. Въ самомъ дѣлѣ, исключая u и v изъ трехъ равенствъ (5), мы придемъ къ одному уравненію въ Декартовыхъ координатахъ вида (1). Не трудно усмотрѣть, что уравненіе поверхности, разрѣшенное относительно z, представляетъ изъ себя въ сущности лишь частный случай системы (5). Въ самомъ дѣлѣ, уравненіе (2) вполнѣ равносильно тремъ уравненіямъ

$$x = u, \quad y = v, \quad z = f(u,v), \tag{6}$$

которыя вполнѣ подходятъ подъ типъ уравненій (5). Мы видимъ такимъ образомъ, что къ случаю уравненія (2), разрѣшеннаго относительно z, переходимъ, полагая въ частность $u = x$, $v = y$, т.е. выбирая за произвольные параметры координаты x и y. Если въ уравненіяхъ (5) дадимъ параметрамъ u и v опредѣленныя значенія, то получимъ вполнѣ опредѣленныя значенія для координатъ x, y, z. Такимъ образомъ, каждой парѣ значеній u, v соотвѣтствуетъ вполнѣ опредѣленная точка на данной поверхности (одна или нѣсколько). Параметры u, v играютъ, очевидно, роль координатъ на данной поверхности; ихъ называютъ обыкновенно криволинейными координатами. Дадимъ параметру v въ уравненіяхъ (5) какое-нибудь постоянное значеніе, а параметръ u будемъ измѣнять. Уравненія (5) въ такомъ случаѣ выражаютъ x, y, z въ функціи одного произвольнаго параметра u (v имѣетъ заданное, числовое значеніе) и слѣдовательно опредѣляютъ нѣкоторую линію - геометрическое мѣсто точекъ, соотвѣтствующихъ данному значенію параметра v и всевозможнымъ значеніямъ параметра u. Линія эта, по самому своему опредѣленію, лежитъ на данной поверхности. Измѣняя значеніе параметра v, получаемъ цѣлое семейство $v = \text{const.}$ подобныхъ линій. Совершенно аналогично имѣемъ второе семейство линій $u = \text{const.}$; линіи того и другого семейства называютъ координатными линіями; онѣ вполнѣ аналогичны прямымъ, опредѣляемымъ уравненіями $x = \text{const.}$ и $y = \text{const.}$, гдѣ x и y - Декартовы координаты на плоскости.

Посмотримъ, какъ вообще опредѣляется произвольная линія на данной поверхности. Такъ какъ линія въ пространствѣ можетъ быть разсматриваема какъ пересѣченіе двухъ поверхностей, то слѣдовательно, предполагая уравненіе данной поверхности въ видѣ (1), произвольную линію на поверхности получаемъ, присоединяя къ уравненію (1) произвольное уравненіе

$$\Phi\ (x,\ y,\ z)\ =\ 0 \qquad (7)$$

Точно такъ же можно поступать и въ томъ случаѣ, когда данная поверхность опредѣляется уравненіемъ вида (2). Въ частности можемъ впрочемъ предположить, что въ уравненіе (7) не входитъ координата z, т.е. другими словами - произвольную линію на данной поверхности получимъ, присоединяя къ уравненію (2) произвольное уравненіе вида

$$\Phi_1\ (x,\ y)\ =\ 0 \qquad (8)$$

Въ самомъ дѣлѣ, мы всегда можемъ черезъ любую линію на данной поверхности провести цилиндрическую поверхность съ образующими, параллельными оси z. Поверхность эта опредѣляется уравненіемъ вида (8) и пересѣкаетъ данную поверхность(2) по разсматриваемой линіи.

Предположимъ наконецъ, что данная поверхность опредѣляется уравненіями вида (5). Присоединяя къ этой системѣ, согласно предидущему, уравненіе (7) и замѣняя въ немъ x,y,z ихъ выраженіями въ функціи параметровъ u,v изъ уравненій (5) данной поверхности, получаемъ соотношеніе вида:

$$\Phi(u, v) = 0 \qquad (9)$$

между параметрами u и v. Обратно, произвольное соотношеніе вида (9) позволяетъ выразить одинъ изъ параметровъ u, v въ функціи другого; вставляя это выраженіе въ формулы (5), получаемъ для x,y,z выраженія, содержащія лишь одинъ независимый параметръ; равенства эти опредѣляютъ, очевидно, нѣкоторую линію, лежащую на данной поверхности. Такимъ образомъ мы видимъ, что произвольная линія на данной поверхности (5) опредѣляется уравненіемъ вида (9) между криволинейными координатами u,v. Разрѣшая уравненіе (9) относительно u или v, можемъ его представить также въ видѣ

$$u = f_1(v) \quad \text{или} \quad v = f_2(u).$$

Наконецъ, можемъ замѣнить уравненіе (9) двумя уравненіями

$$u = f_1(t), \qquad v = \varphi_2(t), \qquad (11)$$

выражающими криволинейныя координаты u,v въ функціи произвольнаго параметра t. Исключая t изъ уравненій (11), приходимъ къ одному соотношенію вида (9). Вставляя выраженія u и v изъ уравненій (11) въ формулы (5), получаемъ для x,y,z выраженія въ функціи параметра t; полученныя такимъ образомъ равенства служатъ уравненіями линіи, лежащей на данной поверхности и опредѣляемой соотношеніями (11).

§ 1. ЛИНЕЙНЫЙ ЭЛЕМЕНТЪ ПОВЕРХНОСТИ.

Предполагая, что данная поверхность опредѣляется тремя уравненіями вида:

$$x = \varphi(u,v), \quad y = \psi(u,v), \quad z = \chi(u,v), \tag{1}$$

разсмотримъ на ней какую-нибудь линію и опредѣлимъ дифференціалъ дуги ds этой линіи. На основаніи формулъ главы II имѣемъ

$$ds^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2, \tag{2}$$

при чемъ x, y, z опредѣляются равенствами (1), въ которыхъ u и v связаны соотношеніемъ вида

$$\Phi(u, v) = 0 \tag{3}$$

или выражены въ функціи произвольнаго параметра t, какъ это было указано во введеніи. Но совершенно независимо отъ этого имѣемъ

$$dx = \frac{\partial x}{\partial u}du + \frac{\partial x}{\partial v}dv, \quad dy = \frac{\partial y}{\partial u}du + \frac{\partial y}{\partial v}dv$$
$$dz = \frac{\partial z}{\partial u}du + \frac{\partial z}{\partial v}dv \tag{4}$$

въ силу однихъ уравненій (1), и слѣдовательно

$$ds^2 = Edu^2 + 2Fdudv + Gdv^2, \tag{5}$$

гдѣ для сокращенія письма введены обозначенія (согласно Гауссу):

$$E = \left(\frac{\partial x}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial u}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial u}\right)^2, \qquad F = \frac{\partial x}{\partial u}\cdot\frac{\partial x}{\partial v} + \frac{\partial y}{\partial u}\cdot\frac{\partial y}{\partial v} + \frac{\partial z}{\partial u}\cdot\frac{\partial z}{\partial v},$$
$$G = \left(\frac{\partial x}{\partial v}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial v}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial v}\right)^2 \tag{6}$$

Коэффиціенты E, F, G выраженія ds^2 суть вполнѣ опредѣленныя функціи параметровъ u, v въ силу уравненій (1) данной поверхности. Формула (5) примѣнима къ л ю б о й линіи на данной поверхности; по этой причинѣ выраженіе ds, опредѣляемое этой формулой при совершенно произвольныхъ, независимыхъ дифференціалахъ du и dv, называется **линейнымъ элементомъ поверхности**. Мы видимъ, что квадратъ линейнаго элемента есть квадратичная форма (однородный многочленъ 2-ой степени) относительно дифференціаловъ криволинейныхъ координатъ, а коеффиціенты этой формы суть опредѣленныя функціи этихъ же координатъ, зависящія лишь отъ вида уравненія данной поверхности.

Въ частности, если поверхность опредѣляется однимъ уравненіемъ вида

$$z = f(x,y), \tag{7}$$

то имѣемъ (см. введеніе):

$$u=x,\ v=y,\ \frac{\partial x}{\partial u}=1,\ \frac{\partial x}{\partial v}=0,\ \frac{\partial y}{\partial u}=0,\ \frac{\partial y}{\partial v}=1,$$
$$\frac{\partial z}{\partial u}=p,\ \frac{\partial z}{\partial v}=q$$

и слѣдовательно

$$E = 1 + p^2, \quad F = pq, \quad G = 1 + q^2 \tag{8}$$

$$ds^2 = (1+p^2)dx^2 + 2pq\,dx\,dy + (1+q^2)\,dy^2 \tag{9}$$

Къ послѣднему результату можемъ притти непосредственно, вставляя въ формулу (2) вмѣсто dz его выраженіе:

$$dz = \frac{\partial z}{\partial x}dx + \frac{\partial z}{\partial y}dy = p\,dx + q\,dy \tag{10}$$

Предположимъ, что имѣются двѣ различныхъ поверхности съ однимъ и тѣмъ же выраженіемъ (5) для квадрата линейнаго элемента. Будемъ называть точки той и другой поверхности, соотвѣтствующія однимъ и тѣмъ же значенініямъ параметровъ u, v,— соотвѣтственными точками. С о о т в ѣ т с т в у ю щ і я линіи на той и другой поверхности, какъ геометрическія мѣста с о о т в ѣ т с т в у ю щ и х ъ точекъ, очевидно опредѣляются однимъ и тѣмъ же уравненіемъ вида (3) или одной и той же парой уравненій вида

$$u = \varphi_1(t), \qquad v = \varphi_2(t) \qquad (11)$$

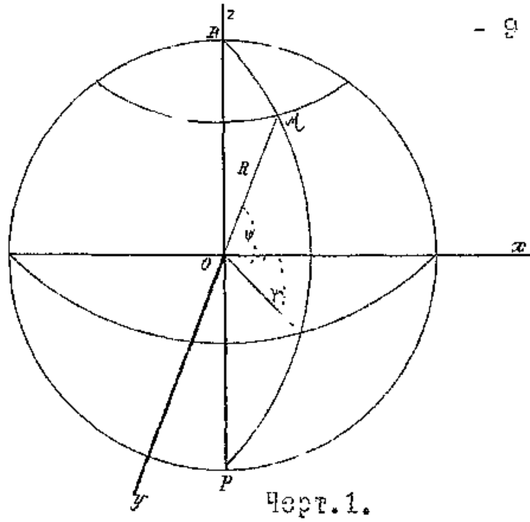
Отсюда слѣдуетъ, что для дифференціаловъ дугъ соотвѣтственныхъ линій на той и другой поверхности получаемъ одно и то же выраженіе (подставляя, напримѣръ, въ формулы (5) выраженія u и v изъ уравненій (11)). Длина дуги получается интегрированіемъ дифференціала дуги, а потому для нашихъ поверхностей длины любыхъ двухъ соотвѣтственныхъ дугъ (между соотвѣтственными точками) равны между собою. Такія двѣ поверхности называются в з а и м н о - н а л а г а ю щ и м и с я одна на другую. Если вообразимъ, что одна изъ поверхностей осуществлена изъ какого-нибудь гибкаго, но нерастяжимаго матеріала, то можемъ всякій достаточно малый кусокъ этой поверхности безъ складокъ и разрывовъ наложить на соотвѣтствующую часть второй поверхности *).

П р и м ѣ р ъ. Разсмотримъ сферу съ центромъ въ началѣ координатъ и радіусомъ $= R$ (см. черт.[illegible]); уравненіе ея имѣетъ видъ:

$$x^2 + y^2 + z^2 = R^2.$$

---

*) *Возможно впрочемъ, что части первой поверхности безъ складокъ и разрывовъ налагаются не на вторую поверхность, а на поверхность ей симметричную, которая, очевидно, имѣетъ тотъ же линейный элементъ.*



Черт.1.

Беря полярныя координаты въ пространствѣ, для точекъ сферы имѣемъ:

$$x = R\cos\varphi\cos\psi, \quad y = R\cos\varphi\sin\psi,$$
$$z = R\sin\varphi \qquad (13)$$

гдѣ φ и ψ совпадаютъ съ широтой и долготой точки M на сферѣ (черт.1), при чемъ за экваторъ считаемъ плоскость xy, а за первый меридіанъ - плоскость zx. Широта φ и долгота ψ, очевидно, играютъ роль криволинейныхъ координатъ на этой сферѣ, такъ какъ каждой системѣ значеній φ, ψ соотвѣтствуетъ, въ силу уравненій (13), опредѣленная точка сферы; исключая φ и ψ изъ этихъ уравненій, приходимъ, очевидно, къ уравненію (12). Дифференцируя равенства (13), имѣемъ:

$$dx = -R\sin\varphi\cos\psi\, d\varphi - R\cos\varphi\sin\psi\, d\psi$$
$$dy = -R\sin\varphi\sin\psi\, d\varphi + R\cos\varphi\cos\psi\, d\psi$$
$$dz = R\cos\varphi\, d\varphi,$$

и слѣдовательно

$$ds^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2 = R^2(d\varphi^2 + \cos^2\varphi\, d\psi^2) \qquad (14)$$

Формула (14) опредѣляетъ линейный элементъ сферы въ криволинейныхъ координатахъ φ, ψ; мы видимъ, что коэффиціентъ F въ данномъ случаѣ равенъ нулю. Замѣтимъ, что это всегда имѣетъ мѣсто, если координатныя линіи на поверхности взаимно-ортогональны; въ разсматриваемомъ случаѣ линіи φ = const.

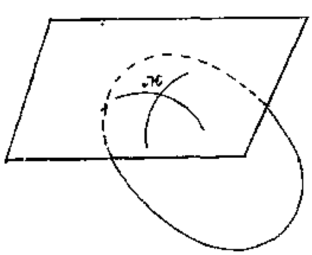
суть параллели, а линіи ψ = const. - меридіаны, и всѣ линіи перваго семейства, очевидно, ортогональны линіямъ второго семейства.

§ 2. КАСАТЕЛЬНЫЯ ПРЯМЫЯ; КАСАТЕЛЬНАЯ ПЛОСКОСТЬ. НОРМАЛЬ; НОРМАЛЬНЫЯ ПЛОСКОСТИ.

Разсмотримъ на поверхности, опредѣляемой уравненіемъ

$$F(x,y,z) = 0 \qquad (1)$$

точку M съ координатами x,y,z (см. черт.2). Черезъ эту точку можно провести на поверхности сколько угодно различныхъ линій и къ каждой изъ этихъ линій въ точкѣ M можно провести касательную. Прямыя, которыя получаемъ такимъ образомъ, называются касательными прямыми данной поверхности. Въ каждой точкѣ поверхности, какъ очевидно изъ предшествующаго, существуетъ безчисленное множество касательныхъ прямыхъ, и потому возникаетъ вопросъ о геометрическомъ мѣстѣ, образуемомъ этими прямыми. Предположимъ, что какая-либо изъ линій, лежащихъ на данной поверхности и проходящихъ черезъ точку M, опредѣляется уравненіемъ



Черт 2

$$\varphi(x,y,z) = 0, \qquad (2)$$

которое слѣдуетъ присоединить къ уравненію (1) данной поверхности (см. введеніе). Функція $\Phi(x,y,z)$ удовлетворяеть при этомъ единственному ограниченію, а именно она должна исчезать для координатъ точки M; въ остальномъ эта функція вполнѣ произвольна. Обозначая черезъ ξ, η, ζ текущія координаты, можемъ написать уравненія касательной къ разсматриваемой нами линіи въ точкѣ M въ слѣдующемъ видѣ:

$$\frac{\xi - x}{dx} = \frac{\eta - y}{dy} = \frac{\zeta - z}{dz}; \qquad (3)$$

дѣйствительно, косинусы угловъ, образуемыхъ касательной съ осями координатъ, равны, какъ извѣстно (гл.II, § 3)

$\frac{dx}{ds}$ $\frac{dy}{ds}$ $\frac{dz}{ds}$ и слѣдовательно пропорціональны dx, dy и dz. Дифференціалы dx, dy, dz, входящіе въ уравненія (3), связаны соотношеніями

$$\begin{aligned} \frac{\partial F}{\partial x}dx + \frac{\partial F}{\partial y}dy + \frac{\partial F}{\partial z}dz = 0 \\ \frac{\partial \Phi}{\partial x}dx + \frac{\partial \Phi}{\partial y}dy + \frac{\partial \Phi}{\partial z}dz = 0 \end{aligned} \qquad (4)$$

которыя получаются дифференцированіемъ уравненій (1) и (2) разсматриваемой нами линіи. Изъ равенствъ (4) можемъ опредѣлить отношенія между дифференціалами dx, dy, dz и замѣнить въ уравненіяхъ (3) dx, dy, dz пропорціональными имъ количествами (ср. гл.II, § 3). Вмѣсто этого можемъ, наоборотъ, въ соотношеніяхъ (4), которыя однородны относительно dx, dy, dz, замѣнить эти дифференціалы пропорціональными имъ разностями $\xi - x$, $\eta - y$, $\zeta - z$, на основаніи уравненій (3). Въ результатѣ получаемъ (ср. гл.II, § 3):

$$\frac{\partial F}{\partial x}(\xi - x) + \frac{\partial F}{\partial y}(\eta - y) + \frac{\partial F}{\partial z}(\zeta - z) = 0 \qquad (5)$$
$$\frac{\partial \Phi}{\partial x}(\xi - x) + \frac{\partial \Phi}{\partial y}(\eta - y) + \frac{\partial \Phi}{\partial z}(\zeta - z) = 0$$

Два уравненія (5), полученныя исключеніемъ дифференціаловъ dx, dy, dz изъ системы (3) и (4), суть уравненія касательной къ разсматриваемой нами линіи. Каждое изъ этихъ уравненій въ отдѣльности опредѣляетъ плоскость, при чемъ эти двѣ плоскости пересѣкаются по нашей касательной. Вторая изъ упомянутыхъ плоскостей, очевидно, зависитъ отъ вида функціи $\Phi(x,y,z)$; что касается до первой, опредѣляемой уравненіемъ

$$\frac{\partial F}{\partial x}(\xi - x) + \frac{\partial F}{\partial y}(\eta - y) + \frac{\partial F}{\partial z}(\zeta - z) = 0 \qquad (6)$$

то она остается неизмѣнной при измѣненіи функціи $\Phi(x,y,z)$, и мы видимъ такимъ образомъ, что всѣ касательныя прямыя, которыя можно провести въ одной точкѣ данной поверхности, лежатъ въ одной плоскости. Плоскость эта называется к а с а т е л ь н о й п л о с к о с т ь ю и опредѣляется уравненіемъ (6); точка (x,y,z) называется ея точкой прикосновенія. Въ каждой точкѣ поверхности проходитъ одна вполнѣ опредѣленная касательная плоскость; исключеніе составляютъ точки (если онѣ существуютъ), для которыхъ одновременно исчезаютъ три частныхъ производныхъ лѣвой части уравненія (1) данной поверхности по x, y и z, такъ какъ для подобной точки уравненіе (6) обращается въ тождество и слѣдовательно касательная плоскость становится неопредѣленной.

Точки поверхности, для которыхъ имѣютъ мѣсто равенства

$$\frac{\partial F}{\partial x} = 0\ , \quad \frac{\partial F}{\partial y} = 0\ , \quad \frac{\partial F}{\partial z} = 0 \qquad (7)$$

называются о с о б ы м и т о ч к а м и; мы ихъ оставимъ безъ разсмотрѣнія и во всемъ дальнѣйшемъ всегда будемъ предполагать, что для изслѣдуемой точки поверхности не имѣютъ одновременно мѣста три равенства (7).

Предположимъ, что поверхность опредѣляется уравненіемъ вида

$$z = f(x,y). \qquad (8)$$

Перенося всѣ члены въ лѣвую часть, приводимъ уравненіе (8) къ виду (1), при чемъ

$$F(x,y,z) = z - f(x,y)$$

и слѣдовательно

$$\frac{\partial F}{\partial x} = -\frac{\partial f}{\partial x} = -p\ , \quad \frac{\partial F}{\partial y} = -\frac{\partial f}{\partial y} = -q\ , \quad \frac{\partial F}{\partial z} = 1 \qquad (9)$$

Уравненіе (6) касательной плоскости въ точкѣ (x,y,z) принимаетъ такимъ образомъ видъ

$$-p(\xi - x) - q(\eta - y) + (\zeta - z) = 0 \qquad (10)$$

или, по перенесеніи двухъ первыхъ членовъ въ правую часть:

$$\zeta - z = p(\xi - x) + q(\eta - y) \qquad (11)$$

Изслѣдуемъ сѣченіе данной поверхности ея касательной плоскостью въ точкѣ M (x,y,z). Для этого перенесемъ начало координатъ въ точку M и примемъ касательную плоскость за плоскость xy. Въ этой новой системѣ координатъ уравненіе поверхности (8) должно удовлетворяться для $x = 0,\ y = 0,\ z = 0$ (для координатъ точки M), откуда:

$$f(o,o) = 0 \qquad (12)$$

а уравненіе (11) должно обратиться въ уравненіе плоскости xy, т.е. въ

$$\zeta = 0,$$

откуда слѣдуетъ, что для $x = o$, $y = o$ имѣемъ:

$$p = \frac{\partial f}{\partial x} = 0, \quad q = \frac{\partial f}{\partial y} = 0 \qquad (13)$$

Сѣченіе поверхности плоскостью xy есть плоская кривая, ур-іе которой получимъ, полагая $z=o$ въ уравненіи (3) данной поверхности. Такимъ образомъ касательная плоскость пересѣкаетъ данную поверхность по кривой, уравненіе которой (въ новой системѣ координатъ) имѣетъ видъ:

$$f(x,y) = 0. \qquad (14)$$

Равенства (12) и (13) показываютъ, что точка M лежитъ на этой кривой и что она есть о с о б а я (вообще говоря, двойная) точка кривой. Мы видимъ слѣдовательно, что кривая, получаемая въ сѣченіи поверхности касательной плоскостью, имѣетъ особую (вообще говоря, двойную) точку въ точкѣ прикосновенія. Хорошимъ примѣромъ можетъ служить линейчатая поверхность 2-го порядка (однополый гиперболоидъ или гиперболическій параболоидъ): произвольная плоскость пересѣкаетъ эту поверхность по кривой 2-го порядка; въ частности касательная плоскость пересѣкаетъ ее по парѣ прямыхъ - прямолинейныхъ образующихъ, проходящихъ черезъ точку прикосновенія, которая очевидно служитъ двойной точкой для распадающейся кривой сѣченія.

Прямая, проходящая черезъ точку M поверхности и перпендикулярная къ соотвѣтствующей касательной плоскости, называется нормалью поверхности. Уравненія ея, какъ уравненія прямой, проходящей черезъ точку (x, y, z) и перпендикулярной къ плоскости (6) или (11), имѣютъ видъ

$$\frac{\xi - x}{\frac{\partial F}{\partial x}} = \frac{\eta - y}{\frac{\partial F}{\partial y}} = \frac{\zeta - z}{\frac{\partial F}{\partial z}} \tag{15}$$

или

$$\frac{\xi - x}{-p} = \frac{\eta - y}{-q} = \zeta - z \tag{16}$$

въ зависимости отъ того, въ какой формѣ - (1) или (8) намъ дано уравненіе поверхности. Называя черезъ X, Y, Z косинусы угловъ, образуемыхъ нормалью съ осями координатъ, имѣемъ изъ уравненій (15) или (16)

$$X : Y : Z = \frac{\partial F}{\partial x} : \frac{\partial F}{\partial y} : \frac{\partial F}{\partial z}$$

или

$$X : Y : Z = -p : -q : 1.$$

Такъ какъ кромѣ того

$$X^2 + Y^2 + Z^2 = 1,$$

то окончательно получаемъ

$$X = \frac{\frac{\partial F}{\partial x}}{\sqrt{\left(\frac{\partial F}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial F}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial F}{\partial z}\right)^2}}, \quad Y = \frac{\frac{\partial F}{\partial y}}{\sqrt{\left(\frac{\partial F}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial F}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial F}{\partial z}\right)^2}} \tag{17}$$

$$Z = \frac{\frac{\partial F}{\partial z}}{\sqrt{\left(\frac{\partial F}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial F}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial F}{\partial z}\right)^2}}$$

или

$$X = \frac{-p}{\sqrt{p^2 + q^2 + 1}}, \quad Y = \frac{-q}{\sqrt{p^2 + q^2 + 1}}, \quad Z = \frac{1}{\sqrt{p^2 + q^2 + 1}} \tag{18}$$

въ зависимости отъ того, опредѣляется ли данная поверхность уравненіемъ (1) или (2). Формулы (17) и (18) содержать квадратные радикалы, передъ которыми возможно подразумѣвать знакъ + или -. Выборъ того или другого знака соотвѣтствуетъ, очевидно, установленію положительнаго направленія на нормали. Условимся, напримѣръ, подразумѣвать въ формулахъ (18) знакъ + передъ радикаломъ $\sqrt{p^2 + q^2 + 1}$; въ такомъ случаѣ Z, т.е. косинусъ угла, образуемаго положительнымъ направленіемъ нормали съ положительнымъ направленіемъ оси z, существенно положителенъ, а слѣдовательно самый уголъ не превосходитъ прямого угла. Такимъ образомъ, сдѣланное нами допущеніе соотвѣтствуетъ выбору того направленія на нормали за положительное, которое образуетъ острый уголъ съ положительнымъ направленіемъ оси z.

Предположимъ наконецъ, что поверхность опредѣляется тремя уравненіями вида

$$x = \varphi(u,v), \quad y = \psi(u,v), \quad z = \chi(u,v), \qquad (19)$$

гдѣ u,v - произвольные параметры. Не трудно и въ этомъ случаѣ опредѣлить косинусы X,Y,Z. Въ самомъ дѣлѣ нормаль, какъ перпендикуляръ къ касательной плоскости, перпендикулярна ко всѣмъ касательнымъ прямымъ въ точкѣ M и между прочимъ къ касательнымъ координатныхъ линій v = const. и u = const. Эти послѣднія линіи опредѣляются уравненіями (19), въ которыхъ надо разсматривать или v или u какъ постоянное, а потому косинусы угловъ, образуемыхъ упомянутыми двумя касательными съ осями координатъ, пропорціональны соотвѣтственно

$$\frac{\partial x}{\partial u}, \ \frac{\partial y}{\partial u}, \ \frac{\partial z}{\partial u}, \qquad \frac{\partial x}{\partial v}, \ \frac{\partial y}{\partial v}, \ \frac{\partial z}{\partial v}$$

т.е. производныя x, y, z, взятыя въ предположеніи, что v для u постоянно (см. гл.II, § 5). Изъ перпендикулярности нормали къ двумъ касательнымъ слѣдуютъ два равенства:

$$\frac{\partial x}{\partial u}X+\frac{\partial y}{\partial u}Y+\frac{\partial z}{\partial u}Z=0$$
$$\frac{\partial x}{\partial v}X+\frac{\partial y}{\partial v}Y+\frac{\partial z}{\partial v}Z=0 \qquad (20)$$

Отсюда выводимъ, что X, Y, Z пропорціональны детерминантамъ второго порядка, составленнымъ изъ элементовъ $\frac{\partial x}{\partial u}$, $\frac{\partial y}{\partial u}$, $\frac{\partial z}{\partial u}$ и $\frac{\partial x}{\partial v}$, $\frac{\partial y}{\partial v}$, $\frac{\partial z}{\partial v}$. Принимая во вниманіе еще соотношеніе $X^2+Y^2+Z^2=1$, имѣемъ:

$$X=\frac{\frac{\partial y}{\partial u}\cdot\frac{\partial z}{\partial v}-\frac{\partial y}{\partial v}\cdot\frac{\partial z}{\partial u}}{\sqrt{\left(\frac{\partial y}{\partial u}\frac{\partial z}{\partial v}-\frac{\partial y}{\partial v}\frac{\partial z}{\partial u}\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial u}\frac{\partial x}{\partial v}-\frac{\partial z}{\partial v}\cdot\frac{\partial x}{\partial u}\right)^2+\left(\frac{\partial x}{\partial u}\cdot\frac{\partial y}{\partial v}-\frac{\partial x}{\partial v}\cdot\frac{\partial y}{\partial u}\right)^2}} \qquad (21)$$

и аналогично для Y, Z, которыя получатся изъ формулы (21) круговой перестановкой буквъ x, y, z. Мы видимъ такимъ образомъ, что косинусы X, Y, Z суть опредѣленныя функціи параметровъ u, v. Полагая въ частности u=x, v=y, придемъ къ формуламъ (13).

Разсмотримъ какую-либо плоскость, проходящую черезъ нормаль поверхности въ точкѣ M. Плоскость эта называется нормальной плоскостью; очевидно въ каждой точкѣ поверхности существуетъ безчисленное множество нормальныхъ плоскостей; всѣ онѣ перпендикулярны касательной плоскости и образуютъ пучокъ, имѣющій осью нормаль поверхности. Въ сѣченіи какой-либо нормальной плоскостью данной поверхности получается плоская кривая, которая называется нормальнымъ сѣченіемъ въ точкѣ M. Касательная къ этой кривой въ точкѣ M должна лежать въ касательной плоскости; слѣдовательно она совпадаетъ съ прямой, по которой пересѣкаются нормальная и касательная плоскости.

§ 3. ОГИБАЮЩАЯ СЕМЕЙСТВА ПОВЕРХНОСТЕЙ.

Пусть намъ дано уравненіе

$$F(x, y, z, \alpha) = 0, \qquad (1)$$

гдѣ α - произвольный параметръ. При всякомъ опредѣленномъ значеніи α уравненіе (1) опредѣляетъ нѣкоторую поверхность. Давая α различныя значенія, получаемъ различныя поверхности, и слѣдовательно ур-іе (1) опредѣляетъ цѣлое семейство поверхностей, зависящее отъ одного произвольнаго параметра. Разсмотримъ двѣ поверхности семейства, изъ которыхъ первая пусть соотвѣтствуетъ значенію параметра, которое обозначимъ черезъ α, а вторая - значенію $\alpha + \Delta\alpha$. Первая опредѣляется уравненіемъ (1), а вторая - уравненіемъ

$$F(x, y, z, \alpha + \Delta\alpha) = 0. \qquad (2)$$

Двѣ поверхность, о которыхъ идетъ рѣчь, пересѣкаются по линіи, опредѣляемой двумя уравненіями (1) и (2) или равносильной системой

$$F(x, y, z, \alpha) = 0$$

$$\frac{F(x, y, z, \alpha + \Delta\alpha) - F(x, y, z, \alpha)}{\Delta\alpha} = 0 \qquad (3)$$

Будемъ теперь приближать $\Delta\alpha$ къ нулю; въ предѣлѣ, когда $\Delta\alpha = 0$ и слѣдовательно вторая поверхность сливается съ первой, система (3) принимаетъ видъ

$$F(x,y,z,\alpha) = 0$$
$$\frac{\partial F(x,y,z,\alpha)}{\partial\alpha} = 0 \qquad (4)$$

(мы предполагаемъ, что функція F допускаетъ производную по α) и опредѣляетъ такъ называемую характеристику семейства, которая можетъ быть разсматриваема какъ предѣльное положеніе кривой сѣченія поверхности (1) съ безконечно-близкой поверхностью семейства. На каждой поверхности семейства мы имѣемъ такимъ образомъ опредѣленную линію -соотвѣтствующую характеристику. Геометрическое мѣсто всѣхъ этихъ линій есть нѣкоторая поверхность, которую называютъ огибающей поверхностью даннаго семейства. Всевозможныя характеристики получаемъ, давая въ уравненіяхъ (4) параметру α всевозможныя постоянныя значенія; уравненіе геометрическаго мѣста характеристикъ, т.е. уравненіе огибающей, получимъ, исключая α изъ уравненій (4). Въ самомъ дѣлѣ соотношеніе

$$\varphi(x,y,z) = 0, \qquad (5)$$

къ которому придемъ такимъ образомъ, удовлетворяется для координатъ любой точки на любой изъ характеристикъ, а слѣдовательно это соотношеніе и есть уравненіе огибающей. Исключеніе параметра α можно выполнить весьма различно: можно въ частности опредѣлить α въ функціи x,y,z изъ второго уравненія системы (4) и вставить полученное выраженіе

$$\alpha = \psi(x,y,z) \qquad (6)$$

въ первое уравненіе той же системы. Такимъ образомъ мы можемъ сказать, что огибающая опредѣляется первымъ изъ уравненій (4), въ которомъ вмѣсто α слѣдуетъ вставить его выраженіе (6), получаемое изъ второго уравненія системы (4).

Такъ какъ огибающая есть геометрическое мѣсто характеристикъ, то она имѣетъ съ каждой изъ поверхностей семейства цѣлый рядъ общихъ точекъ, а именно всѣ точки характеристики, лежащія на поверхности семейства. Докажемъ, что во всѣхъ этихъ точкахъ поверхность семейства (огибаемая) и огибающая имѣютъ общія касательныя плоскости, другими словами - огибающая касается каждой изъ поверхностей семейства въ точкахъ характеристики. Для доказательства замѣтимъ, что поверхность семейства опредѣляется уравненіемъ (1), гдѣ параметръ α имѣетъ какое-нибудь постоянное значеніе, а огибающая, какъ мы только что говорили, - тѣмъ же уравненіемъ (1), но въ которомъ α есть функція x, y, z, опредѣляемая вторымъ изъ уравненій (4). Касательныя плоскости въ точкѣ (x, y, z) къ поверхности семейства и къ огибающей опредѣляются соотвѣтственно уравненіями (см. § 2)

$$\frac{\partial F}{\partial x}(\xi - x) + \frac{\partial F}{\partial y}(\eta - y) + \frac{\partial F}{\partial z}(\zeta - z) = 0 \qquad (7)$$

и

$$\left(\frac{\partial F}{\partial x}\right)\cdot(\xi - x) + \left(\frac{\partial F}{\partial y}\right)\cdot(\eta - y) + \left(\frac{\partial F}{\partial z}\right)\cdot(\zeta - z) = 0 \qquad (8)$$

при чемъ черезъ $\left(\frac{\partial F}{\partial x}\right)$, $\left(\frac{\partial F}{\partial y}\right)$, $\left(\frac{\partial F}{\partial z}\right)$ обозначены производныя функціи F по x, y, z, взятыя въ предположеніи, что α есть функція x, y, z, опредѣляемая вторымъ изъ уравненій (4). Выполняя дифференцированія въ этомъ предположеніи, имѣемъ:

$$\left(\frac{\partial F}{\partial x}\right) = \frac{\partial F}{\partial x} + \frac{\partial F}{\partial \alpha}\frac{\partial \alpha}{\partial x}, \quad \left(\frac{\partial F}{\partial y}\right) = \frac{\partial F}{\partial y} + \frac{\partial F}{\partial \alpha}\cdot\frac{\partial \alpha}{\partial y}$$

$$\left(\frac{\partial F}{\partial z}\right) = \frac{\partial F}{\partial z} + \frac{\partial F}{\partial \alpha}\cdot\frac{\partial \alpha}{\partial z};$$

но въ силу второго изъ уравненій (4) $\frac{\partial F}{\partial \alpha} = 0$ и слѣдовательно

$$\left(\frac{\partial F}{\partial x}\right) = \frac{\partial F}{\partial x}, \quad \left(\frac{\partial F}{\partial y}\right) = \frac{\partial F}{\partial y}, \quad \left(\frac{\partial F}{\partial z}\right) = \frac{\partial F}{\partial z},$$

т.е. уравненія (7) и (8) вполнѣ совпадаютъ между собою, если мы ихъ напишемъ для общей точки x, y, z поверхности семейства и огибающей; для того, чтобы это стало вполнѣ очевиднымъ, слѣдуетъ лишь еще замѣтить, что въ такой общей точкѣ не только x, y, z, но и α имѣютъ одни и тѣ же значенія какъ для поверхности семейства, такъ и для огибающей, такъ какъ всѣ общія точки лежатъ на характеристикѣ и слѣдовательно координаты ихъ удовлетворяютъ уравненіямъ (4), въ которыхъ α имѣетъ данное постоянное значеніе. Итакъ, положеніе наше вполнѣ доказано.

Разсмотримъ теперь три поверхности нашего семейства, соотвѣтствующія значеніямъ параметра α, $\alpha+\Delta\alpha$ и $\alpha+\Delta'\alpha$. Эти три поверхности пересѣкаются въ одной или нѣсколькихъ точкахъ, координаты которыхъ опредѣляются изъ трехъ уравненiй нашихъ поверхностей:

$$\mathcal{F}(x,y,z,\alpha)=0,\quad \mathcal{F}(x,y,z,\alpha+\Delta\alpha)=0,\quad \mathcal{F}(x,y,z,\alpha+\Delta'\alpha)=0 \qquad (9)$$

Систему (9) можемъ замѣнить равносильной ей системой

$$\mathcal{F}(x,y,z,\alpha)=0,\qquad \frac{\mathcal{F}(x,y,z,\alpha+\Delta\alpha)-\mathcal{F}(x,y,z,\alpha)}{\Delta\alpha}=0$$

$$\frac{\mathcal{F}(x,y,z,\alpha+\Delta'\alpha)-\mathcal{F}(x,y,z,\alpha)}{\Delta'\alpha}=0 \qquad (10)$$

Предполагая, что функцiя F допускаетъ разложенiе въ рядъ Тэйлора (хотя бы конечный) по степенямъ приращенiя параметра α, переписываемъ второе и третье уравненiя системы(10) въ слѣдующемъ видѣ:

$$\frac{\partial\mathcal{F}(x,y,z,\alpha)}{\partial\alpha}+\frac{\Delta\alpha}{1.2}\cdot\frac{\partial^2\mathcal{F}(x,y,z,\alpha)}{\partial\alpha^2}+\frac{\Delta\alpha^2}{1.2.3}\cdot\frac{\partial^3\mathcal{F}(x,y,z,\alpha)}{\partial\alpha^3}+\ldots\ldots=0$$

$$\frac{\partial\mathcal{F}(x,y,z,\alpha)}{\partial\alpha}+\frac{\Delta'\alpha}{1.2}\cdot\frac{\partial^2\mathcal{F}(x,y,z,\alpha)}{\partial\alpha^2}+\frac{\Delta'\alpha^2}{1.2.3}\cdot\frac{\partial^3\mathcal{F}(x,y,z,\alpha)}{\partial\alpha^3}+\ldots=0 \qquad (11)$$

Предполагаемъ, что отношенiе $\underline{k}$ приращенiя $\underline{\Delta'\alpha}$ къ приращенiю $\underline{\Delta\alpha}$ остается конечнымъ и отличнымъ отъ единицы.Замѣняя во второмъ изъ предшествующихъ уравненiй $\underline{\Delta'\alpha}$ черезъ $k\Delta\alpha$, вычитая изъ него первое и дѣля результатъ на $\Delta\alpha$, получаемъ:

$$\frac{1-k}{1.2}\cdot\frac{\partial^2\mathcal{F}(x,y,z,\alpha)}{\partial\alpha^2}+\frac{1-k^2}{1.2.3}\cdot\Delta\alpha\cdot\frac{\partial^3\mathcal{F}(x,y,z,\alpha)}{\partial\alpha^3}+\ldots=0 \qquad (12)$$

Систему (9) мы такимъ образомъ замѣнили равносильной системой, состоящей изъ перваго изъ ур-iи (9), перваго изъ ур-iй (11) и ур-iя (12).

Предположимъ теперь, что $\Delta\alpha$ и $\Delta'\alpha$ стремятся къ нулю и слѣдовательно вторая и третья поверхности стремятся къ слiянiю съ первой. Въ предѣлѣ для $\Delta\alpha=0$, $\Delta'\alpha=0$ система наша принимаетъ видъ:

$$\mathcal{F}(x,y,z,\alpha)=0,\ \frac{\partial\mathcal{F}(x,y,z,\alpha)}{\partial\alpha}=0,\ \frac{\partial^2\mathcal{F}(x,y,z,\alpha)}{\partial\alpha^2}=0 \qquad (13)$$

и опредѣляетъ координаты одной или нѣсколькихъ точекъ, которыя можно разсматривать какъ предѣльное положеніе точекъ пересѣченія данной поверхности съ двумя безконечно-близкими поверхностями семейства. Такъ какъ первыя два изъ уравненій (13) совпадаютъ съ уравненіями (4), то слѣдовательно точки, о которыхъ идетъ рѣчь, лежатъ на характеристикѣ семейства. На каждой изъ поверхностей семейства имѣются опредѣленныя точки, координаты которыхъ получаются изъ уравненіи (13); переходя отъ одной поверхности семейства къ другой, мы измѣняемъ параметръ α, входящіи въ уравненія (13), и слѣдовательно получаемъ цѣлый рядъ такихъ точекъ, геометрическимъ мѣстомъ которыхъ служитъ, очевидно, нѣкоторая линія. Линія эта называется р е б р о м ъ в о з в р а т а и лежитъ, очевидно, всѣми своими точками на огибающей семейства. Уравненія ребра возврата получимъ непосредственно изъ системы (13), разсматривая въ ней α какъ произвольный параметръ. Разрѣшая уравненія (13) относительно x,y,z, получаемъ равенства вида

$$x=\varphi(\alpha),\qquad y=\psi(\alpha),\qquad z=\chi(\alpha), \qquad (14)$$

которыя и суть уравненія ребра возврата въ той формѣ, въ которой мы обыкновенно разсматривали уравненія пространственной кривой. Если бы мы исключили α изъ трехъ уравненій (13), то получили бы два уравненія

$$\Phi(x,y,z)=0,\qquad \Psi(x,y,z)=0 \qquad (15)$$

ребра возврата въ Декартовыхъ координатахъ.

Такъ какъ ребро возврата есть геометрическое мѣсто точекъ, лежащихъ на характеристикахъ, то каждая характеристика имѣетъ съ ребромъ возврата одну или нѣсколько общихъ точекъ; это именно тѣ точки, координаты которыхъ опредѣляются уравненіями (13) для даннаго постояннаго значенія α, соотвѣтствующаго данной характеристикѣ. Докажемъ, что въ этихъ точкахъ касательныя къ характеристикѣ и къ ребру возврата совпадаютъ между собой, другими словами - ребро возврата касается всѣхъ характеристикъ. Такъ какъ и та и другая касательныя проходятъ черезъ общую точку характеристики и ребра возврата, то достаточно показать, что направленія обѣихъ касательныхъ совпадаютъ. Косинусы угловъ, образуемыхъ касательной къ данной характеристикѣ съ осями координатъ, пропорціональны дифференціаламъ dx, dy, dz, которые получаемъ, дифференцируя уравненія (4) характеристики. При дифференцированіи мы должны имѣть въ виду, что α въ уравненіяхъ (4) имѣетъ данное постоянное значеніе. Такимъ образомъ получаемъ:

$$\frac{\partial F}{\partial x}\,dx+\frac{\partial F}{\partial y}\,dy+\frac{\partial F}{\partial z}\,dz=0 \qquad (16)$$

$$\frac{\partial^2 F}{\partial\alpha\,\partial x}\cdot dx+\frac{\partial^2 F}{\partial\alpha\,\partial y}\,dy+\frac{\partial^2 F}{\partial\alpha\,\partial z}\cdot dz=0$$

Съ другой стороны, косинусы угловъ, образуемыхъ касательной къ ребру возврата съ осями координатъ, пропорціональны дифференціаламъ dx, dy, dz, которые получаемъ, дифференцируя уравненія (14) ребра возврата или равносильныя имъ уравненія (13), въ которыхъ разсматриваемъ α какъ перемѣнный параметръ. Ограничимся дифференцированіемъ первыхъ двухъ уравненій системы (13), тогда получаемъ

$$\begin{aligned}\frac{\partial \mathcal{F}}{\partial x}\cdot dx+\frac{\partial \mathcal{F}}{\partial y}dy+\frac{\partial \mathcal{F}}{\partial z}dz+\frac{\partial \mathcal{F}}{\partial \alpha}d\alpha=0\\ \frac{\partial^2 \mathcal{F}}{\partial \alpha\,\partial x}dx+\frac{\partial^2 \mathcal{F}}{\partial \alpha\,\partial y}dy+\frac{\partial^2 \mathcal{F}}{\partial \alpha\,\partial z}dz+\frac{\partial^2 \mathcal{F}}{\partial \alpha^2}d\alpha=0\end{aligned} \qquad (17)$$

но въ силу второго и третьяго изъ уравненій (13)

$$\frac{\partial \mathcal{F}}{\partial \alpha}=0 \quad \text{и} \quad \frac{\partial^2 \mathcal{F}}{\partial \alpha^2}=0$$

и слѣдовательно система (17) совпадаетъ съ системой (13). Два уравненія (16) позволяютъ опредѣлить отношенія между дифференціалами dx, dy, dz, и мы видимъ такимъ образомъ, что направленія двухъ касательныхъ въ общей точкѣ характеристики и ребра возврата совпадаютъ между собой, а отсюда въ свою очередь слѣдуетъ справедливость высказаннаго выше положенія.

Примѣръ. Разсмотримъ семейство шаровъ даннаго радіуса R.

$$[x-\varphi(\alpha)]^2+[y-\psi(\alpha)]^2+[z-\chi(\alpha)]^2-R^2=0, \qquad (18)$$

зависящее отъ одного параметра α.

Центры шаровъ семейства лежатъ, очевидно, на кривой, опредѣляемой уравненіями

$$x=\varphi(\alpha), \quad y=\psi(\alpha), \quad z=\chi(\alpha). \qquad (19)$$

Характеристика семейства опредѣляется совокупностью уравненій (18) и уравненія

$$[x-\varphi(\alpha)]\cdot\varphi'(\alpha)+[y-\psi(\alpha)]\psi'(\alpha)+[z-\chi(\alpha)]\chi'(\alpha)=0, \qquad (20)$$

получаемаго дифференцированіемъ уравненія (18) по α. Исключая α изъ двухъ уравненій (18) и (20), получаемъ уравненіе поверхности - огибающей семейства, которая называется п о в е р х н о с т ь ю к а н а л о в ъ. Легко усмотрѣть, что характеристики семейства суть круги; дѣйствительно уравненіе (20) при постоянномъ α есть уравненіе плоскости, которая пересѣкаетъ шаръ даннаго семейства, опредѣляемый уравненіемъ (18), по кругу. Плоскость (20), очевидно, проходитъ черезъ центръ шара; такимъ образомъ всѣ характеристики суть круги радіуса = R, и поверхность каналовъ, какъ геометрическое мѣсто характеристикъ, содержитъ семейство такихъ круговъ. Дифференцируя уравненіе (20) еще разъ по α, имѣемъ:

$$[x-\varphi(\alpha)]\varphi''(\alpha)+[y-\psi(\alpha)]\psi''(\alpha)+[z-\chi(\alpha)]\chi''(\alpha) = \\ = \varphi'^2(\alpha)+\psi'^2(\alpha)+\chi'^2(\alpha). \tag{21}$$

Исключая α изъ трехъ уравненій (18), (20) и (21), получаемъ уравненія ребра возврата.

Наиболѣе интересенъ тотъ частный случай, когда кривая - геометрическое мѣсто центровъ шаровъ семейства - есть плоская линія. Выбирая ея плоскость за плоскость xy, мы должны положить $\chi(\alpha) = 0$; кромѣ того, безъ ущерба для общности, можемъ предположить $\varphi(\alpha) = \alpha$, и тогда уравненія (18), (20) и (21) принимаютъ видъ:

$$(x-\alpha)^2 + [y-\psi(\alpha)]^2 + z^2 = R^2 \tag{22}$$

$$x-\alpha + [y-\psi(\alpha)].\psi'(\alpha) = 0 \tag{23}$$

$$[y-\psi(\alpha)].\psi''(\alpha) = 1 + \psi'^2(\alpha). \tag{24}$$

Уравненія (22) и (23) показываютъ намъ, что характеристики семейства суть круги, ортогональные плоскости xy; отсюда заключаемъ, что плоскость xy служитъ плоскостью симметріи для огибающей.

До сихъ поръ мы предполагали, что данное семейство поверхностей зависитъ отъ одного параметра. Разсмотримъ теперь семейство поверхностей, опредѣляемое уравненіемъ

$$F(x,y,z,\alpha,\beta) = 0, \qquad (25)$$

въ которое входятъ д в а произвольныхъ параметра α и β. Возьмемъ одну изъ поверхностей этого семейства, соотвѣтствующую какимъ-нибудь опредѣленнымъ значеніямъ α_0, β_0 двухъ параметровъ. Возможно построить безчисленное множество различныхъ семействъ поверхностей, зависящихъ отъ одного параметра, которыя бы содержали данную поверхность

$$F(x,y,z,\alpha_0,\beta_0) = 0 \qquad (26)$$

и входили въ составъ семейства (25) съ двумя параметрами. Въ самомъ дѣлѣ, для этого достаточно въ уравненія (25) положить β равнымъ какой-нибудь функціи $\varphi(\alpha)$ параметра α, которая для $\alpha = \alpha_0$ принимаетъ значеніе $\beta = \beta_0$. Обозначая черезъ $\psi(\alpha)$ совершенно произвольную функцію (конечную и допускающую производную для $\alpha = \alpha_0$), мы можемъ, очевидно, положить

$$\varphi(\alpha) = \psi(\alpha) - \psi(\alpha_0) + \beta_0, \qquad (27)$$

такъ какъ для $\alpha = \alpha_0$ получаемъ

$$\varphi(\alpha_0) = \psi(\alpha_0) - \psi(\alpha_0) + \beta_0 = 0.$$

Дифференцируя равенство (27) по α, имѣемъ:

$$\varphi'(\alpha) = \psi'(\alpha);$$

полагая здѣсь $\alpha = \alpha_0$, получаемъ

$$\varphi'(\alpha_0) = \psi'(\alpha_0),$$

откуда заключаемъ, что значеніе производной $\varphi'(\alpha)$ для $\alpha = \alpha_0$ остается совершенно произвольнымъ. Семейство поверхностей съ однимъ параметромъ, выдѣленное нами, опредѣляется уравненіемъ

$$F\left(x, y, z, \alpha, \varphi(\alpha)\right) = 0 \qquad (28)$$

Характеристику семейства получимъ, присоединяя уравненіе

$$\frac{\partial \mathcal{F}}{\partial \alpha} + \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial \beta} \cdot \varphi'(\alpha) = 0 \qquad (29)$$

получаемое дифференцированіемъ предшествующаго уравненія по α. Въ частности характеристика, находящаяся на поверхности (26), опредѣляется уравненіями

$$\mathcal{F}(x, y, z, \alpha_0, \beta_0) = 0$$

$$\frac{\partial \mathcal{F}(x, y, z, \alpha_0, \beta_0)}{\partial \alpha_0} + \frac{\partial \mathcal{F}(x, y, z, \alpha_0, \beta_0)}{\partial \beta_0} \cdot \varphi'(\alpha_0) = 0 \qquad (30)$$

которыя получаемъ, полагая въ уравненіяхъ (28) и (29) $\alpha = \alpha_0$ и принимая во вниманіе равенство (27). Измѣняя функцію $\varphi(\alpha)$, мы будемъ получать различныя семейства (28) съ однимъ параметромъ; при этомъ, какъ мы видѣли, $\varphi'(\alpha_0)$ можетъ получать совершенно произвольныя значенія. Такимъ образомъ въ уравненія (30) входитъ совершенно произвольный параметръ $\varphi'(\alpha_0)$, и слѣдовательно на данной поверхности (26) получаемъ безчисленное множество различныхъ характеристикъ, въ зависимости отъ выбора функціи $\varphi(\alpha)$. Не трудно убѣдиться, что всѣ эти характеристики проходятъ черезъ одну или нѣсколько общихъ точекъ, лежащихъ на данной поверхности. Въ самомъ дѣлѣ, напишемъ три уравненія:

$$F(x,y,z,\alpha_0,\beta_0)=0$$

$$\frac{\partial F(x,y,z,\alpha_0,\beta_0)}{\partial\alpha_0}=0 \qquad (31)$$

$$\frac{\partial F(x,y,z,\alpha_0,\beta_0)}{\partial\beta_0}=0$$

которыя опредѣляютъ одну или нѣсколько системъ значенія x,y,z, удовлетворяющихъ, очевидно, уравненіямъ (30) при любомъ значеніи $\varphi'(\alpha_0)$. Точки, опредѣляемыя координатами x,y,z, которыя удовлетворяютъ уравненіямъ (31), лежатъ на всѣхъ характеристикахъ, получаемыхъ при всевозможныхъ значеніяхъ $\varphi'(\alpha_0)$ въ уравненіяхъ (30), и слѣдовательно высказанное выше замѣчаніе вполнѣ оправдывается. Такъ какъ характеристика семейства есть предѣльное положеніе линіи пересѣченія данной поверхности съ безконечно-близкой поверхностью семейства, то слѣдовательно точки, опредѣляемыя уравненіями (31), могутъ быть разсматриваемы какъ предѣльное положеніе точекъ пересѣченія данной поверхности (26) съ двумя какими-нибудь безконечно-близкими поверхностями семейства (25), зависящаго отъ двухъ произвольныхъ параметровъ. На каждой поверхности семейства находятся, очевидно, такія „предѣльныя" точки; координаты ихъ опредѣляются изъ уравненій:

$$F(x,y,z,\alpha,\beta)=0$$

$$\frac{\partial F(x,y,z,\alpha,\beta)}{\partial\alpha}=0 \qquad (32)$$

$$\frac{\partial F(x,y,z,\alpha,\beta)}{\partial\beta}=0$$

Разсматривая α и β какъ произвольные параметры, получаемъ безчисленное множество предѣльныхъ точекъ; геометрическимъ мѣстомъ ихъ служитъ, очевидно, нѣкоторая поверхность, уравненіе которой

$$\Phi(x,y,z) = 0 \qquad (33)$$

получимъ, исключая α и β изъ трехъ уравненій (32). Исключеніе это можно вести различными способами; въ частности можемъ изъ двухъ послѣднихъ уравненій системы (32) опредѣлить α и β въ функціи x,y,z и вставить эти выраженія въ первое уравненіе. Такимъ образомъ мы можемъ сказать, что поверхность - геометрическое мѣсто предѣльныхъ точекъ опредѣляется уравненіемъ (25), въ которомъ α и β суть функціи x,y,z, опредѣляемыя двумя послѣдними уравненіями системы (32). Поверхность эта называется о г и б а ю щ е й семейства съ двумя параметрами; по самому опредѣленію она завѣдомо имѣетъ съ каждой изъ поверхностей семейства (25) общія точки, а именно предѣльныя точки этой поверхности (кромѣ нихъ, есть и другія общія точки, такъ какъ двѣ поверхности вообще пересѣкаются по нѣкоторой линіи). Докажемъ, что въ этихъ точкахъ огибающая и поверхность семейства (огибаемая) имѣютъ общія касательныя плоскости, другими словами - огибающая касается всѣхъ поверхностей семейства. Такъ какъ и поверхность семейства и огибающая опредѣляются уравненіемъ (25), въ которомъ α и β для поверхности семейства суть постоянныя, а для огибающей - функціи x,y,z, опредѣляемыя двумя послѣдними изъ уравненій (32), то двѣ касательныя плоскости, о которыхъ идетъ рѣчь, опредѣляются соотвѣтственно уравненіями:

$$\frac{\partial F}{\partial x}(\xi - x) + \frac{\partial F}{\partial y}(\eta\ y) + \frac{\partial F}{\partial z}(\zeta - z) = 0 \qquad (34)$$

и
$$\left(\frac{\partial F}{\partial x}\right)\cdot(\xi - x) + \left(\frac{\partial F}{\partial y}\right)\cdot(\eta - y) + \left(\frac{\partial F}{\partial z}\right)(\zeta - z) = 0 \qquad (35)$$

при чемъ черезъ ($\frac{\partial F}{\partial x}$), ($\frac{\partial F}{\partial y}$), ($\frac{\partial F}{\partial z}$) обозначены производныя функціи F по x,y,z, взятыя въ предположеніи, что α и β суть вышеупомянутыя функціи x,y,z. Мы имѣемъ такимъ образомъ:

$$\left(\frac{\partial F}{\partial x}\right) = \frac{\partial F}{\partial x} + \frac{\partial F}{\partial \alpha}\ \frac{\partial \alpha}{\partial x} + \frac{\partial F}{\partial \beta}\cdot\frac{\partial \beta}{\partial x}.$$
$$\left(\frac{\partial F}{\partial y}\right) = \frac{\partial F}{\partial y} + \frac{\partial F}{\partial \alpha}\cdot\frac{\partial \alpha}{\partial y} + \frac{\partial F}{\partial \beta}\cdot\frac{\partial \beta}{\partial y}.$$
$$\left(\frac{\partial F}{\partial z}\right) = \frac{\partial F}{\partial z} + \frac{\partial F}{\partial \alpha}\cdot\frac{\partial \alpha}{\partial z} + \frac{\partial F}{\partial \beta}\cdot\frac{\partial \beta}{\partial z};$$

но въ силу двухъ послѣднихъ изъ уравненія (32)

$$\frac{\partial F}{\partial \alpha} = 0, \qquad \frac{\partial F}{\partial \beta} = 0$$

и слѣдовательно

$$\left(\frac{\partial F}{\partial x}\right) = \frac{\partial F}{\partial x},\ \left(\frac{\partial F}{\partial y}\right) = \frac{\partial F}{\partial y},\ \left(\frac{\partial F}{\partial z}\right) = \frac{\partial F}{\partial z},$$

т.е. коеффиціентами въ уравненіяхъ (34) и (35) служатъ однѣ и тѣ же функціи x, y, z, α и β . Такъ какъ кромѣ того для общихъ точекъ огибающей и поверхности семейства не только x,y,z, но и α и β имѣютъ одни и тѣ же значенія, какъ на поверхности семейства, такъ и на огибающей (общія точки суть „предѣльныя точки", координаты которыхъ опредѣляются изъ уравненій(32) при данныхъ значеніяхъ α и β), то въ этихъ точкахъ уравненія (34) и (35) вполнѣ совпадаютъ, и слѣдовательно положеніе наше доказано.

П р и м ѣ р ъ. Разсмотримъ семейство шаровъ радіуса R, имѣющихъ центры на плоскости xy.

Уравненіе семейства имѣетъ видъ:

$$(x-\alpha)^2+(y-\beta)^2+z^2-R^2=0 \qquad (36)$$

гдѣ α и β - произвольные параметры. Дифференцируя уравненіе (36) по α и β, имѣемъ

$$x-\alpha=0, \qquad y-\beta=0 \qquad (37)$$

исключая α и β изъ трехъ уравненія (36) и (37), получаемъ

$$z^2-R^2=0, \qquad \text{откуда} \quad z=\pm R.$$

Такимъ образомъ огибающая семейства состоитъ изъ пары плоскостей, параллельныхъ плоскости xy и отстоящихъ отъ нея на разстояніе = радіусу R въ ту и другую сторону. Результатъ этотъ, впрочемъ, не трудно было усмотрѣть и непосредственно.

§ 4. РАЗВЕРТЫВАЮЩІЯСЯ ПОВЕРХНОСТИ.

Предположимъ, что намъ дано семейство плоскостей, зависящее отъ одного параметра, который будемъ обозначать черезъ t. Уравненіе этого семейства имѣетъ видъ

$$Ax+By+Cz+D=0, \qquad (1)$$

гдѣ A, B, C, D суть функціи параметра t. Дифференцируя два раза по t, получаемъ

$$A'x+B'y+C'z+D'=0 \qquad (2)$$

$$A''x+B''y+C''z+D''=0 \qquad (3)$$

при чемъ акцентами обозначаемъ производныя по t. Уравненія (1) и (2) опредѣляютъ характеристику семейства; такъ какъ оба уравненія 1-ой степени относительно x,y,z, то всѣ характеристики суть прямыя линіи и огибающая семейства, какъ геоной поверхности, опредѣляемой уравненіемъ (1), плоскостью

$$z = h \tag{15}$$

параллельной касательной плоскости въ точкѣ M. Уравненіе кривой сѣченія имѣетъ видъ

$$f(x, y) = h \tag{16}$$

Предполагая h безконечно малымъ, можемъ удовлетворить уравненію (16) безконечно-малыми значеніями x и y, такъ какъ при h = 0 оно удовлетворяется для x = 0 и y = 0. Ограничиваясь безконечно-малыми значеніями x и y, т.е. разсматривая точки, безконечно близкія къ точкѣ M, можемъ лѣвую часть уравненія (16) разложить въ рядъ Макъ-Лорена; въ результатѣ имѣемъ уравненіе:

$$f(o,o) + (px + qy) + \frac{1}{1.2}(rx^2 + 2sxy + ty^2) + \ldots = h,$$

гдѣ подъ p,q,r,s,t разумѣемъ значенія первыхъ и вторыхъ производныхъ функціи f (x,y) для x = 0, y = 0. Мы видѣли, что для x = 0, y = 0

$$f(x,y) = f(o,o) = 0, \quad p = 0, \quad q = 0;$$

такимъ образомъ уравненіе (16) окончательно принимаетъ слѣдующій видъ:

$$rx^2 + 2sxy + ty^2 + \cdots = 2h, \tag{17}$$

гдѣ не выписаны члены 3-го и высшихъ порядковъ относительно x и y. Пренебрегая этими членами, получаемъ уравненіе кривой 2-го порядка

$$rx^2 + 2sxy + ty^2 = 2h, \tag{18}$$

которая съ точностью до безконечно-малыхъ высшаго порядка изображаетъ сѣченіе поверхности плоскостью (15) въ смежности съ точкой M. Кривая эта, очевидно, подобна кривой, которую мы разсматривали выше, опредѣляя ее уравненіемъ (4), и называется индикатрисой Дюпена (Dupin) Измѣняя всѣ радіусы-векторы индикатрисы Дюпена въ отношеніи $1 : \sqrt{2h}$, приходимъ къ нашей первоначальной индикатрисѣ (4). Если $rt - s^2 > 0$, то индикатриса Дюпена есть эллипсъ, притомъ дѣйствительный или мнимый въ зависимости отъ знака h; если $rt - s^2 = 0$, то индикатриса обращается въ пару параллельныхъ прямыхъ, точно также дѣйствительныхъ или мнимыхъ въ зависимости отъ знака h. Отсюда заключаемъ, что въ смежности съ эллиптической или параболической точкой всѣ дѣйствительныя точки поверхности лежатъ по одну сторону касательной плоскости. Если $rt - s^2 < 0$, то индикатриса Дюпена есть гипербола, притомъ всегда дѣйствительная, независимо отъ знака h. Отсюда явствуетъ, что въ смежности съ гиперболической точкой дѣйствительныя точки поверхности лежатъ по обѣ стороны касательной плоскости, такъ что поверхность въ области этой точки имѣетъ сѣдлообразный видъ. Всѣ эти результаты вполнѣ согласны съ тѣмъ, что мы имѣли выше изъ другихъ соображеній.

§ 7. ИЗЫСКАНІЕ ГЛАВНЫХЪ СѢЧЕНІЙ И ГЛАВНЫХЪ РАДІУСОВЪ КРИВИЗНЫ ВЪ ПРОИЗВОЛЬНОЙ ТОЧКѢ ПОВЕРХНОСТИ. ПРИЗНАКИ ТОЧКИ ОКРУГЛЕНІЯ.

Возвращаясь къ общей формулѣ (17) параграфа 5-го и дѣля числитель и знаменатель на du^2, имѣемъ для кривизны нормальнаго сѣченія въ произвольной точкѣ поверхности выраженіе

$$\frac{1}{R} = \frac{D + 2D'k + D''k^2}{E + 2Fk + Gk^2} \tag{1}$$

гдѣ
$$k = \frac{dv}{du} \tag{2}$$

Въ частности для $u = x$, $v = y$, т.е. въ томъ случаѣ, когда поверхность опредѣляется уравненіемъ вида

$$z = f(x, y) \tag{3}$$

имѣемъ:

$$k = \frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dy}{ds}}{\frac{dx}{ds}}, \tag{4}$$

а коэффиціенты E,F,G,D,D', D" опредѣляются формулами (8) параграфа 1-го и формулами (11) параграфа 5-го. Въ этомъ случаѣ k равняется отношенію $\frac{\beta}{\alpha}$ косинусовъ угловъ, образуемыхъ касательной нормальнаго сѣченія съ осями x и y, и зависитъ слѣдовательно только отъ направленія касательной*). Задача изысканія главныхъ сѣченій въ произвольной точкѣ поверхности приводится такимъ образомъ, на основаніи предшествующаго параграфа, къ изысканію такихъ значеній k, для которыхъ выраженіе (1) кривизны $\frac{1}{R}$ принимаетъ наибольшее и наименьшее значенія. При этомъ коэффиціенты E,F,G,D,D',D" мы должны считать постоянными въ данной точкѣ поверхности. Искомыя значенія k получимъ, приравнивая нулю производную по k выраженія $\frac{1}{R}$. Такъ какъ выраженіе (1) есть дробь, то

---

*) *Легко было бы убѣдиться, что и въ общемъ случаѣ въ данной точкѣ поверхности k зависитъ только отъ направленія касательной.*

при дифференцированіи получимъ дробь, знаменатель которой равенъ квадрату знаменателя данной дроби. Отбрасывая этого знаменателя, получаемъ слѣдующее уравненіе для опредѣленія k:

$$(E+2Fk+Gk^2)(D'+D''k)-(F+Gk)(D+2D'k+D''k^2)=0 \quad (5)$$

Мы можемъ его написать также въ видѣ пропорціи

$$\frac{D+2D'k+D''k^2}{E+2Fk+Gk^2}=\frac{D'+D''k}{F+Gk}$$

Умножая оба члена второго отношенія на k и вычитая ихъ изъ соотвѣтствующихъ членовъ перваго отношенія, получаемъ отношеніе, равное каждому изъ двухъ данныхъ. Такимъ образомъ имѣемъ три равныхъ отношенія:

$$\frac{D+2D'k+D''k^2}{E+2Fk+Gk^2}=\frac{D'+D''k}{F+Gk}=\frac{D+D'k}{E+Fk} \quad (6)$$

Послѣднія два даютъ намъ пропорцію, изъ которой получаемъ для опредѣленія k квадратное уравненіе

$$(FD''-GD')k^2-(GD-ED'')k+(ED'-FD)=0. \quad (7)$$

Не трудно усмотрѣть, что его можно переписать еще въ слѣдующемъ видѣ:

$$\begin{vmatrix} k^2 & E & D \\ -k & F & D' \\ 1 & G & D'' \end{vmatrix}=0; \quad (8)$$

Въ самомъ дѣлѣ, разлагая детерминантъ по элементамъ перваго столбца, непосредственно получаемъ лѣвую часть уравненія(7) Рѣшая квадратное уравненіе (7) или (8), получимъ два корня k_1 и k_2, соотвѣтствующіе касательнымъ двухъ главныхъ сѣченій въ разсматриваемой точкѣ поверхности. Косинусы α, β, γ угловъ, образуемыхъ каждой изъ этихъ касательныхъ съ осями координатъ, въ томъ случаѣ, когда поверхность опредѣляется ур-iемъ (3), легко найдемъ изъ соотношенiй:

$$\alpha : \beta : \gamma = dx:dy:dz = dx:dy: pdx + qdy =$$
$$= 1 : k : p + qk.$$

Замѣняя здѣсь k сначала черезъ k_1, а затѣмъ черезъ k_2 найдемъ отношенiя α, β, γ для той и другой касательной; а зная эти отношенiя, найдемъ и самые косинусы.

Главные радiусы кривизны R_1 и R_2 найдемъ изъ формулы (1), замѣняя въ ней k черезъ k_1 и k_2. При этомъ мы можемъ значительно упростить вычисленiя, замѣчая, что для каждаго изъ корней k_1, k_2 правая часть формулы (1), въ силу соотношенiй (6), можетъ быть замѣнена болѣе простой дробью. Такимъ образомъ имѣемъ между прочимъ:

$$\frac{1}{R_1} = \frac{D' + D''k_1}{F + Gk_1}, \qquad \frac{1}{R_2} = \frac{D' + D''k_2}{F + Gk_2} \qquad (9)$$

Пользуясь формулами (9), вычислимъ Гауссову и среднюю кривизну поверхности; но предварительно выведемъ двѣ вспомогательныя формулы. Изъ извѣстныхъ выраженiй суммы и произведенiя корней k_1 и k_2 квадратнаго уравненiя (7) слѣдуетъ, что 1, $k_1 + k_2$ и $k_1 k_2$ пропорцiональны минорамъ детерминанта въ лѣвой части уравненiя (8). Умножая 1, $k_1 + k_2$, $k_1 k_2$ на элементы второго и третьяго столбцовъ детерминанта и складывая результаты, получаемъ въ томъ и другомъ случаѣ нуль, такъ какъ элементы обоихъ упомянутыхъ столбцовъ входятъ въ составъ миноровъ, которымъ пропорцiональны 1, $k_1 + k_2$ и $k_1 k_2$. Такимъ образомъ получаемъ два соотношенiя:

$$\mathcal{E} + \mathcal{F}(k_1 + k_2) + \mathcal{G}(k_1 k_2) = 0 \qquad (10)$$

$$\mathcal{D} + \mathcal{D}'(k_1 + k_2) + \mathcal{D}''(k_1 k_2) = 0 \qquad (11)$$

Возвращаясь къ равенствамъ (9), перемножимъ ихъ почленно; тогда получимъ:

$$\frac{1}{R_1 R_2} = \frac{D'^2 + D'D''(k_1 + k_2) + D''^2 k_1 k_2}{F^2 + FG(k_1 + k_2) + G^2 k_1 k_2},$$

Но равенства (10) и (11), по умноженіи ихъ соотвѣтственно на G и на D", даютъ намъ:

$$FG(k_1 + k_2) + G^2 k_1 k_2 = -EG, \quad D'D''(k_1 + k_2) + D''^2 k_1 k_2 = -DD'',$$

а потому предшествующее выраженіе Гауссовой кривизны $\frac{1}{R_1 R_2}$ принимаетъ окончательно слѣдующій видъ:

$$\frac{1}{\mathcal{R}_1 \mathcal{R}_2} = \frac{\mathcal{D}'^2 - \mathcal{D}\mathcal{D}''}{\mathcal{F}^2 - \mathcal{E}\mathcal{G}} = \frac{\mathcal{D}\mathcal{D}'' - \mathcal{D}'^2}{\mathcal{E}\mathcal{G} - \mathcal{F}^2} \qquad (12)$$

Для вычисленія средней кривизны $\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}$ сложимъ почленно два равенства (9):

$$\frac{1}{\mathcal{R}_1} + \frac{1}{\mathcal{R}_2} = \frac{\mathcal{D}' + \mathcal{D}''k_1}{\mathcal{F} + \mathcal{G}k_1} + \frac{\mathcal{D}' + \mathcal{D}''k_2}{\mathcal{F} + \mathcal{G}k_2} =$$

$$= \frac{2\mathcal{D}'\mathcal{F} + (\mathcal{D}''\mathcal{F} + \mathcal{D}'\mathcal{G})(k_1 + k_2) + 2\mathcal{D}''\mathcal{G}k_1 k_2}{\mathcal{F}^2 + \mathcal{F}\mathcal{G}(k_1 + k_2) + \mathcal{G}^2 k_1 k_2}.$$

Знаменатель полученнаго выраженія, какъ уже было показано, равенъ $F^2 - \mathcal{E}G$. Числитель можетъ быть представленъ въ видѣ $2D'F + D''\left[F(k_1 + k_2) + Gk_1 k_2\right] + G\left[D'(k_1 + k_2) + D''k_1 k_2\right]$; но выраженія въ квадратныхъ скобкахъ, въ силу соотношеній (10) и (11), равны $-\mathcal{E}$ и $-D$; слѣдовательно числитель равенъ $2D'F - D''E - DG$.

Такимъ образомъ, по умноженіи числителя и знаменателя на -1, получаемъ окончательно слѣдующее выраженіе средней кривизны поверхности:

$$\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} = \frac{ED'' + GD - 2FD'}{EG - F^2} \qquad (13)$$

Зная сумму и произведенie главныхъ кривизнъ $\frac{1}{R_1}$ и $\frac{1}{R_2}$, можемъ составить квадратное уравненie:

$$(EG - F^2)\frac{1}{R^2} - (ED'' + GD - 2FD')\frac{1}{R} + (DD'' - D'^2) = 0 \qquad (14)$$

корнями котораго служатъ эти количества. Умножая уравненie (14) на R^2, получаемъ квадратное уравненie

$$(DD'' - D'^2)R^2 - (ED'' + GD - 2FD')R + (EG - F^2) = 0 \qquad (15)$$

для опредѣленія главныхъ радiусовъ кривизны R_1 и R_2 поверхности въ произвольной точкѣ.

Если поверхность опредѣляется уравненiемъ вида (3), то $u = x$, $v = y$, $k = \frac{dy}{dx}$ и формулы (7), (12) и (13) по подстановкѣ значенiй E,F,G,D,D',D" принимаютъ видъ:

$$[pqt\ (1+q^2)s]k^2 - [(1+q^2)r - (1+p^2)t]k + [(1+p^2)s + pqr] - 0 \quad (16)$$

$$\frac{1}{R_1 R_2} = \frac{rt - s^2}{(1+p^2+q^2)^2} \qquad (17)$$

$$\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} = \frac{(1+p^2)t + (1+q^2)r - 2pqs}{(1+p^2+q^2)^{\frac{3}{2}}} \qquad (18)$$

При выводѣ послѣднихъ двухъ формулъ приходится вычислять выраженie $EG-F^2$, при чемъ получаемъ:

$$EG - F^2 = (1+p^2)(1+q^2) - p^2q^2 = 1 + p^2 + q^2 \qquad (19)$$

Выраженie (17) Гауссовой кривизны позволяетъ весьма просто рѣшить вопросъ, какого рода данная точка поверхности - эллиптическая, гиперболическая или параболическая. Принимая ьо вниманіе условія (7) предшествующего параграфа, непосредственно видимъ, что эллиптическая, гиперболическая и параболическая точка поверхности (?) характеризуются соотвѣтственно условіями

$$rt-s^2>0,\ rt-s^2<0,\ rt-s^2=0 \qquad (20)$$

Это тѣ же условія, какія мы имѣли и въ § 6, но тамъ они были выведены лишь для спеціальнаго расположенія осей координатъ.

Покажемъ, что всѣ точки любой развертывающейся поверхности суть параболическія точки, другими словами, что Гауссова кривизна во всѣхъ точкахъ развертывающейся поверхности равна нулю. Для этой цѣли замѣтимъ, что касательныя плоскости развертывающейся поверхности образуютъ семейство, зависящее только отъ одного произвольнаго параметра (§ 4), а потому коэффиціенты p и q въ уравненіи касательной плоскости

$$\zeta - z = p(\xi - x) + q(\eta - y)$$

не могутъ быть независимы. Мы имѣемъ такимъ образомъ

$$q=\varphi(p) \qquad (21)$$

для произвольныхъ значеній x и y. Дифференцируя равенство (21) по x и по y, получаемъ

$$s = \varphi'(p).r, \qquad t = \varphi'(p).s = [\varphi'(p)]^2.r$$

и слѣдовательно

$$rt-s^2 = [\varphi'(p)]^2.r^2 - [\varphi'(p)]^2.r^2 = 0,$$

откуда непосредственно слѣдуетъ справедливость высказаннаго положенія.

Выведемъ условія, при выполненіи которыхъ данная точка поверхности есть точка скругленія. Мы видѣли въ § 6, что для точки скругленія задача изысканія главныхъ сѣченіи становится неопредѣленной, такъ какъ индикатриса въ этомъ случаѣ обращается въ кругъ, для котораго каждыи діаметръ служитъ главной осью. Обратно, если главныя сѣченія становятся неопредѣленными, то индикатриса обращается въ кругъ и соотвѣтствующая ей точка есть точка округленія. Такимъ образомъ, необходимыя и достаточныя условія точки скругленія получимъ, если потребуемъ, чтобы уравненіе (16), опредѣляющее направленія касательныхъ къ главнымъ сѣченіямъ, обратилось въ тождество. Коэффиціенты этого уравненія должны исчезать, и мы приходимъ такимъ образомъ къ искомымъ условіямъ, которыя можемъ написать въ видѣ равенства трехъ отношеніи:

$$\frac{r}{1+p^2} = \frac{s}{pq} = \frac{t}{1+q^2} \qquad (22)$$

Легко убѣдиться, пользуясь этими условіями, что всѣ точки произвольной сферы суть точки скругленія. Для удобства помѣстимъ начало координатъ въ центрѣ сферы, которая такимъ образомъ опредѣляется уравненіемъ

$$x^2 + y^2 + z^2 = R^2.$$

Дифференцируя это уравненіе по X и по Y и въ предположеніи, что Z есть неявная функція X и Y, имѣемъ:

$$x + zp = 0, \qquad y + zq = 0.$$

Дифференцируя каждое изъ полученныхъ равенствъ по x и по y, приходимъ къ тремъ соотношеніямъ:

$$1+p^2+zr=0, \qquad pq+zs=0, \qquad 1+q^2+zt=0,$$

откуда

$$\frac{r}{1+p^2}=\frac{s}{pq}=\frac{t}{1+q^2}=-\frac{1}{z}.$$

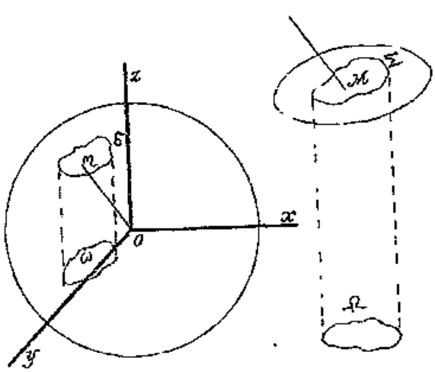
§ 2. ГАУССОВА КРИВИЗНА ПОВЕРХНОСТИ.

Предположимъ, что намъ дана поверхность, опредѣляемая уравненіемъ

$$z=f(x,y), \tag{1}$$

Опишемъ изъ начала координатъ какъ изъ центра сферу радіусомъ = 1 и будемъ проводить радіусы этой сферы параллельно положительнымъ нормалямъ поверхности (черт.9). Въ такомъ случаѣ каждой точкѣ M (x,y,z) данной поверхности соотвѣтствуетъ опредѣленная точка m сферы, и координаты этой точки равны X,Y,Z т.е. косинусамъ угловъ, образуемыхъ нормалью къ поверхности въ точкѣ M съ осями координатъ. Между

Черт.9.



данной поверхностью и сферой, которую иногда называютъ сферой Гаусса, устанавливается вполнѣ опредѣленное соотвѣтствіе; всякой линіи на поверхности соотвѣтствуетъ опредѣленная линія на сферѣ Гаусса; равнымъ образомъ произвольной площадкѣ Σ на поверхности соотвѣтствуетъ опредѣленная площадка σ на сферѣ Гаусса. Величину этой площадки σ иногда называютъ полной кривизной площади Σ. Выберемъ площадку Σ такъ, чтобы точка M поверхности лежала внутри ея, и будемъ затѣмъ уменьшать размѣры Σ до нуля; при этомъ и площадка σ будетъ уменьшаться, обращаясь въ предѣлѣ въ одну точку m, подобно тому какъ Σ стягивается въ точку M. Отношеніе

$$\frac{\sigma}{\Sigma}$$

величинъ двухъ площадокъ при этомъ стремится къ опредѣленному предѣлу K, который называется Гауссовой кривизной поверхности въ точкѣ M. Опредѣленіе Гауссовой кривизны, очевидно, вполнѣ аналогично опредѣленію, данному нами кривизнѣ плоской кривой (гл.I); остается показать, что оно не противорѣчитъ опредѣленію Гауссовой кривизны, данному въ § 3, т.е. показать, что

$$K = \lim \frac{\sigma}{\Sigma} = \frac{1}{R_1 R_2}, \qquad (2)$$

гдѣ R_1 и R_2 - главные радіусы кривизны въ точкѣ M.

Замѣтимъ прежде всего, что изъ самаго опредѣленія величины кривой поверхности слѣдуетъ, что безконечно-малая площадка Σ на поверхности отличается на безконечно-малыя высшихъ порядковъ отъ площадки, которую получимъ, проектируя Σ на касательную плоскость въ какой-либо точкѣ внутри Σ прямыми произвольнаго направленія. Въ частности можемъ проектировать Σ прямыми, параллельными оси

χ, на касательную плоскость въ точкѣ М. Называя черезъ Ω проекцію (ортогональную) Σ на плоскость xy, мы имѣемъ слѣдовательно съ точностью до безконечно-малыхъ высшаго порядка

$$\Sigma = \frac{\Omega}{\chi}\,, \tag{3}$$

такъ какъ Ω равняется, очевидно, произведенію величины площадки, полученной нами на касательной плоскости, на косинусъ угла между касательной плоскостью и плоскостью xy, то есть на χ.

Равнымъ образомъ для сферы имѣемъ съ точностью до безконечно-малыхъ высшаго порядка

$$\sigma = \frac{\omega}{\chi} \tag{4}$$

гдѣ ω - проекція площадки σ на плоскость xy. Знаменатели въ выраженіяхъ (3) и (4) совпадаютъ, такъ какъ нормали къ сферѣ въ точкѣ m и къ поверхности въ точкѣ М параллельны между собою. Принимая во вниманіе равенства (3) и (4), имѣемъ:

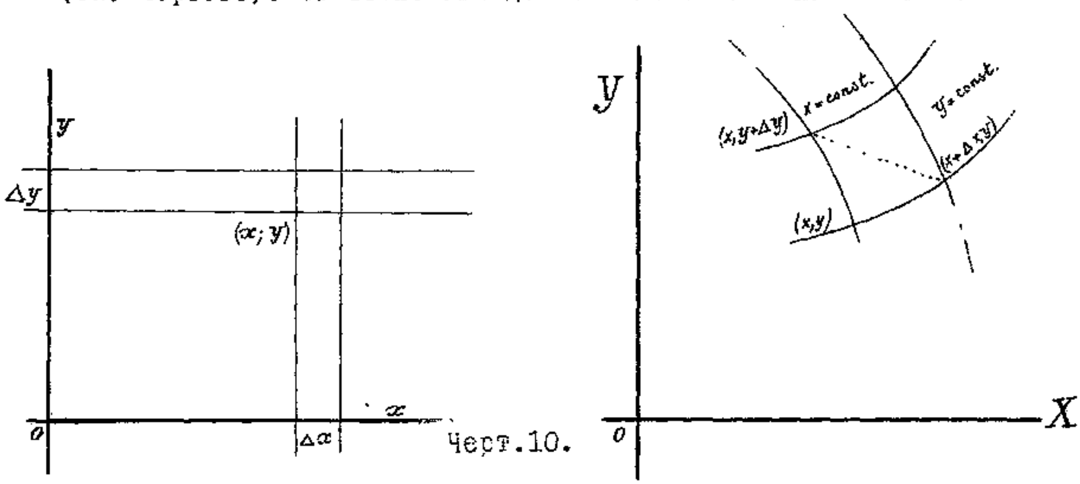
$$\mathcal{K} = \lim \frac{\sigma}{\Sigma} = \lim \frac{\omega}{\Omega} \tag{5}$$

Предположимъ въ частности, что площадка Ω есть прямоугольникъ, ограниченный прямыми, параллельными осямъ x и y и отстоящими одна отъ другой на разстоянія Δx и Δy. Въ такомъ случаѣ

$$\Omega = \Delta x . \Delta y \tag{6}$$

и площадка Σ на данной поверхности имѣетъ видъ криволинейнаго четыреугольника, ограниченнаго кривыми, которыя получаются отъ пересѣченія поверхности плоскостями x = const.,

y = const. Для сферы Гаусса x и y отличны отъ Декартовыхъ координатъ $\mathcal{X}$ и $\mathcal{Y}$ ея точекъ; поэтому линіи x = const., y = = const. на сферѣ Гаусса проектируются на плоскость xy уже не прямыми, а вообще нѣкоторыми кривыми линіями. Площадка ω имѣетъ видъ криволинейнаго четыреугольника, и координаты его вершинъ суть значенія $\mathcal{X}, \mathcal{Y}$, соотвѣтствующія значеніямъ x, y въ четырехъ вершинахъ прямоугольника Ω, т.е. значеніямъ: x, y; $x+\Delta x, y$; $x+\Delta x, y+\Delta y$; $x, y+\Delta y$ (см. черт.10). Съ точностью до безконечно-малыхъ высшаго



Черт.10.

порядка можемъ считать ω равнымъ площади параллелограмма или двойной площади треугольника съ тремя вершинами, которыя соотвѣтствуютъ значеніямъ $x\ y$; $x+\Delta x, y$ и $x, y+\Delta y$ параметровъ x, y. Притомъ мы будемъ разлагать значенія $\mathcal{X}, \mathcal{Y}$, соотвѣтствующія послѣднимъ двумъ вершинамъ треугольника, въ ряды Тэйлора, ограничиваясь членами перваго порядка относительно Δx, Δy. Въ концѣ концовъ, съ точностью до безконечно-малыхъ 3-го порядка имѣемъ:

$$\omega = \begin{vmatrix} X & Y & 1 \\ X+\frac{\partial X}{\partial x}\Delta x, & Y+\frac{\partial Y}{\partial x}\Delta x, & 1 \\ X+\frac{\partial X}{\partial y}\Delta y, & Y+\frac{\partial Y}{\partial y}\Delta y, & 1 \end{vmatrix}$$

или, вычитая элементы 1-ой строки опредѣлителя изъ элементовъ 2-ой и 3-ей:

$$\omega = \begin{vmatrix} X & Y & 1 \\ \frac{\partial X}{\partial x}\Delta x & \frac{\partial Y}{\partial x}\Delta x & 0 \\ \frac{\partial X}{\partial y}\Delta y & \frac{\partial Y}{\partial y}\Delta y & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \frac{\partial X}{\partial x} & \frac{\partial Y}{\partial x} \\ \frac{\partial X}{\partial y} & \frac{\partial Y}{\partial y} \end{vmatrix} \cdot \Delta x \cdot \Delta y \tag{7}$$

Вставляя значенія (6) и (7) площадей Ω и ω въ равенство (5), получаемъ:

$$K = \lim \begin{vmatrix} \frac{\partial X}{\partial x}, & \frac{\partial Y}{\partial x} \\ \frac{\partial X}{\partial y}, & \frac{\partial Y}{\partial y} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \frac{\partial X}{\partial x}, & \frac{\partial Y}{\partial x} \\ \frac{\partial X}{\partial y}, & \frac{\partial Y}{\partial y} \end{vmatrix} \tag{8}$$

гдѣ X, Y суть значенія косинусовъ угловъ наклоненія нормали для точки M поверхности. Подставляя въ равенство (8) выраженія X и Y (§ 2, форм.13), имѣемъ:

$$K = \begin{vmatrix} \frac{-r}{\sqrt{p^2+q^2+1}} - p\frac{\partial}{\partial x}\left\{\frac{1}{\sqrt{p^2+q^2+1}}\right\}, & \frac{-s}{\sqrt{p^2+q^2+1}} - q\frac{\partial}{\partial x}\left\{\frac{1}{\sqrt{p^2+q^2+1}}\right\} \\ \frac{-s}{\sqrt{p^2+q^2+1}} - p\frac{\partial}{\partial y}\left\{\frac{1}{\sqrt{p^2+q^2+1}}\right\}, & \frac{-t}{\sqrt{p^2+q^2+1}} - q\frac{\partial}{\partial y}\left\{\frac{1}{\sqrt{p^2+q^2+1}}\right\} \end{vmatrix}$$

$$= \frac{rt-s^2}{1+p^2+q^2} + \frac{(pt-qs)}{\sqrt{p^2+q^2+1}}\cdot\frac{\partial}{\partial x}\left\{\frac{1}{\sqrt{p^2+q^2+1}}\right\} + \frac{rq-ps}{\sqrt{p^2+q^2+1}}\cdot\frac{\partial}{\partial y}\left\{\frac{1}{\sqrt{p^2+q^2+1}}\right\} =$$

$$=\frac{rt-s^2}{p^2+q^2+1}-\frac{(pt-qs)(pr+qs)+(rq-ps)(ps+qt)}{(p^2+q^2+1)^2}=$$

$$=\frac{rt-s^2}{p^2+q^2+1}-\frac{(rt-s^2)(p^2+q^2)}{(p^2+q^2+1)^2}=\frac{rt-s^2}{(p^2+q^2+1)^2} \qquad (9)$$

Сопоставляя этотъ результатъ съ выраженіемъ Гауссовой кривизны, даннымъ въ § 7 (форм.17), видимъ, что $K=\frac{1}{R_1 R_2}$, т.е. наше новое опредѣленіе кривизны поверхности согласно съ опредѣленіемъ, даннымъ выше.

§ 9. ОБРАЗОВАНІЕ ПОВЕРХНОСТЕЙ ЛИНІЯМИ. ПОВЕРХНОСТИ КОНИЧЕСКІЯ И ЦИЛИНДРИЧЕСКІЯ; ПОВЕРХНОСТИ ВРАЩЕНІЯ.

Пусть намъ дано семейство линій въ пространствѣ, зависящее отъ одного параметра α. Уравненія линіи семейства имѣютъ видъ:

$$F_1(x,y,z,\alpha)=0, \quad F_2(x,y,z,\alpha)=0 \qquad (1)$$

Исключая изъ нихъ α, получаемъ уравненіе

$$\Phi(x,y,z)=0 \qquad (2)$$

поверхности - геометрическаго мѣста линій даннаго семейства. Можно предположить также, что имѣется семейство линій

$$\begin{aligned} &F_1(x,y,z,\alpha_1,\alpha_2 \ldots\ldots \alpha_m)=0 \\ &F_2(x,y,z,\alpha_1,\alpha_2 \ldots\ldots \alpha_m)=0 \end{aligned} \qquad (3)$$

зависящее уже не отъ одного, а отъ m произвольныхъ параметровъ, но въ то же время даны m-1 соотношеній

$$\psi_1(\alpha_1,\alpha_2,\ldots \alpha_m)=0, \qquad \psi_{m-1}(\alpha_1,\alpha_2,\ldots \alpha_m)=0 \qquad (4)$$

которымъ должны удовлетворять эти параметры. Соотношенія (4) очевидно выдѣляютъ изъ даннаго семейства линій семейство, зависящее лишь отъ одного произвольнаго параметра, и слѣдовательно этотъ случай приводится къ разсмотрѣнному выше; уравненіе (2) поверхности, образуемой линіями семейства, получимъ непосредственно, исключая α_1, α_2, ... α изъ n+1 уравненій (3) и (4).

Пусть въ частности намъ дано семейство линій

$$\mathcal{F}_1(x, y, z, \alpha, \beta)=0, \quad \mathcal{F}(x, y, z, \alpha, \beta)=0, \tag{5}$$

зависящее отъ двухъ параметровъ α и β, и требуется опредѣлить поверхность, образуемую тѣми линіями даннаго семейства, которыя пересѣкаютъ нѣкоторую данную линію

$$\mathcal{F}_3(x, y, z)=0, \quad \mathcal{F}_4(x, y, z)=0 \tag{6}$$

Условіе пересѣченія линій (5) и (6) получимъ, исключая x,y,z изъ четырехъ уравненій (5) и (6), которымъ должны удовлетворять координаты x,y,z точки пересѣченія. Въ результатѣ получимъ одно соотношеніе вида

$$\Psi(\alpha, \beta) = 0 \tag{7}$$

и уравненіе искомой поверхности будемъ имѣть, если исключимъ α и β изъ трехъ уравненій (5) и (7). Линіи семейства (5), геометрическимъ мѣстомъ которыхъ служитъ искомая поверхность, называются ея о б р а з у ю щ и м и, а линія (6) - н а п р а в л я ю щ е й.

Разсмотримъ всевозможныя прямыя пространства; онѣ опредѣляются уравненіями:

$$x = mz + a, \quad y = nz + b \tag{8}$$

и образуютъ семейство, зависящее отъ четырехъ параметровъ.

Присоединяя какія-нибудь три соотношенія между m, n, a, b, напримѣръ требуя, чтобы прямыя линіи (8) пересѣкали одновременно три какихъ-нибудь линіи въ пространствѣ, получимъ поверхность - геометрическое мѣсто прямыхъ линій. Всѣ такія поверхности называются линейчатыми, а прямыя линіи, лежащія на нихъ, - прямолинейными образующими.

Разсмотримъ семейство прямыхъ опредѣленнаго направленія, другими словами, предположимъ, что въ уравненіяхъ (8) m и n имѣютъ данныя неизмѣнныя значенія; семейство наше, очевидно, зависитъ только отъ двухъ произвольныхъ параметровъ a и b. Возьмемъ еще направляющую линію, которую для простоты вычисленій можемъ предположить плоской и лежащей въ плоскости xy. Уравненія ея имѣютъ видъ

$$z=0, \quad \psi(x,y)=0. \tag{9}$$

Мы должны исключить x, y, z изъ четырехъ уравненій (8) и (9); но при $z = 0$ изъ уравненій (8) получаемъ $x = a$, $y = b$, и слѣдовательно результатъ исключенія имѣетъ видъ:

$$\psi(a,b)=0 \tag{10}$$

Намъ остается исключить a и b изъ трехъ уравненій (8) и (10); опредѣляя a и b изъ уравненій (8) и вставляя въ уравненіе (10), получаемъ:

$$\psi(x-mz,\ y-nz)=0. \tag{11}$$

Уравненіе (11) есть уравненіе линейчатой поверхности, всѣ образующія которой параллельны между собою; такая поверхность, какъ извѣстно, называется цилиндрической поверхьостьк. Дифференцируя уравненie (11) по x и по y, въ предположенiи, что z есть функцiя x и y, опредѣляемая этимъ уравненiемъ, имѣемъ:

$$\psi_1 \cdot (1 - mp) - \psi_2 \cdot np = 0 \tag{12}$$

$$-\psi_1 \, mq + \psi_2 \cdot (1 - nq) = 0,$$

гдѣ черезъ ψ_1 и ψ_2 обозначены производныя функцiи ψ по ея первому и второму аргументамъ. Уравненiя (12) даютъ намъ два выраженiя для отношенiя $\psi_1 : \psi_2$; условie ихъ совмѣстности имѣетъ видъ

$$\frac{np}{1 - mp} = \frac{1 - nq}{mq},$$

откуда по освобожденiи отъ знаменателей получаемъ:

$$1 - mp - nq = 0. \tag{13}$$

Уравненie (13) есть уравненie съ частными производными, которое имѣетъ мѣсто для всякой цилиндрической поверхности, опредѣляемой уравненiемъ (11) при совершенно произвольномъ видѣ функцiи ψ. Такъ какъ $-q, -p, 1$ пропорцiональны косинусамъ угловъ, образуемыхъ нормалью поверхности съ осями координатъ, то уравненie (13) служитъ лишь аналитическимъ выраженiемъ того факта, что нормаль въ произвольной точкѣ цилиндрической поверхности перпендикулярна прямолинейной образующей.

Разсмотримъ семейство прямыхъ линiи

$$x - x_0 = \alpha(z - z_0), \quad y - y_0 = \beta(z - z_0), \tag{14}$$

проходящихъ черезъ данную точку (x_0, y_0, z_0); семейство это зависитъ отъ двухъ произвольныхъ параметровъ α и β. Присоединяя еще соотношенie вида

$$\psi(\alpha, \beta) = 0, \tag{15}$$

которое получимъ изъ условія, чтобы прямыя (14) пересѣкали данную направляющую, можемъ исключить α и β изъ 3-хъ уравненій (14) и (15). Опредѣляя α и β изъ уравненій (14) и вставляя въ уравненіе (15), получаемъ уравненіе

$$\psi\left(\frac{x-x_0}{z-z_0}, \frac{y-y_0}{z-z_0}\right)=0 \qquad (16)$$

поверхности, образуемой линіями семейства. Поверхность эта называется к о н и ч е с к о й поверхностью, а точка (x_0, y_0, z_0) - ея вершиной; прямолинейныя образующія конической поверхности всѣ проходятъ черезъ ея вершину. Уравненіе (16) можно привести къ другому виду; оно устанавливаетъ произвольную зависимость между двумя аргументами $\frac{x-x_0}{z-z_0}$ и $\frac{y-y_0}{z-z_0}$; отсюда непосредственно слѣдуетъ, что первый аргументъ или его обратная величина $\frac{z-z_0}{x-x_0}$ есть произвольная функція отношенія обоихъ аргументовъ. Такимъ образомъ имѣемъ:

$$\frac{z-z_0}{x-x_0}=\varphi\left(\frac{y-y_0}{x-x_0}\right) \text{ или } \quad z-z_0=(x-x_0)\,\varphi\left(\frac{y-y_0}{x-x_0}\right) \qquad (17)$$

На основаніи уравненія (17) $z-z_0$ равняется однородной функціи 1-го измѣренія двухъ аргументовъ $x-x_0$ и $y-y_0$, а потому, по теоремѣ Эйлера, сумма произведеній этихъ аргументовъ на частныя производныя $z-z_0$ по соотвѣтствующимъ аргументамъ должна равняться $z-z_0$. Замѣчая еще, что производныя по $x-x_0$ и $y-y_0$ равны производнымъ по x и y имѣемъ:

$$p(x-x_0)+q(y-y_0)=z-z_0 \qquad (18)$$

Уравненіе (18) есть уравненіе съ частными производными, которое имѣетъ мѣсто для всѣхъ коническихъ поверхностей съ вершиной въ точкѣ (x_0, y_0, z_0). Уравненіе (16), при совершенно произвольномъ видѣ функціи ψ, служитъ „общимъ интеграломъ" уравненія (18). Принимая во вниманіе, что -p, -q, +1 пропорціональны косинусамъ угловъ наклоненія нормали, легко убѣждаемся, что уравненіе (18) есть не что иное, какъ условіе перпендикулярности нормали поверхности къ прямой, соединяющей точку (x,y,z) съ вершиной (x_0, y_0, z_0), т.е. къ прямолинейной образующей.

Мы видѣли уже (§ 4), что цилиндрическія и коническія поверхности принадлежатъ къ числу развертывающихся. Для всякой развертывающейся поверхности имѣетъ мѣсто уравненіе $rt - s^2 = 0$ съ частными производными 2-го порядка; оно должно выполняться между прочимъ и для коническихъ и цилиндрическихъ поверхностей. Не трудно было бы въ этомъ убѣдиться, дифференцируя по x и по y уравненія (13) и (18).

Разсмотримъ семейство круговъ, имѣющихъ центры на какой-нибудь прямой, которую примемъ за ось z, и лежащихъ въ плоскостяхъ, перпендикулярныхъ къ этой прямой. Уравненія семейства имѣютъ видъ:

$$z = h, \quad x^2 + y^2 = R^2 \tag{19}$$

За направляющую возьмемъ произвольную кривую въ плоскости zx, опредѣляемую уравненіями

$$y = 0, \quad \psi(z, x) = 0. \tag{20}$$

Исключая x,y,z изъ четырехъ уравненій (19) и (20), полагаемъ y = 0 во второмъ изъ уравненій (19) и получаемъ x =R;

вставляя значенія z и x въ уравненіе (20), имѣемъ:

$$\psi(h, R) = 0 \tag{21}$$

Исключая теперь h и R изъ трехъ уравненій (19) и (21), получаемъ уравненіе

$$\psi(z, \sqrt{x^2+y^2}) = 0. \tag{22}$$

которое опредѣляетъ поверхность, образуемую нашими кругами. Кривая (20) есть, очевидно, сѣченіе поверхности (22) плоскостью zx. Будемъ вращать эту кривую около оси z; тогда каждая точка кривой опишетъ окружность одного изъ круговъ нашего семейства, и слѣдовательно вся кривая опишетъ поверхность (22). Мы видимъ такимъ образомъ, что поверхность эта можетъ быть образована вращеніемъ плоской кривой (20) около оси z. По этой причинѣ поверхность (22) называютъ поверхностью вращенія около оси z; кривая (20) и всѣ прочія сѣченія поверхности плоскостями, проходящими черезъ ось z, называются ея меридіанами, а круги семейства (19), лежащіе на поверхности,- параллелями. Уравненіе (22) поверхности вращенія можно, очевидно, привести къ виду

$$\Phi(z, x^2+y^2) = 0$$

или

$$z = \varphi(x^2+y^2). \tag{23}$$

Дифференцируя уравненіе (23) по x и по y, имѣемъ:

$$p = 2x.\ \varphi'(x^2+y^2), \qquad q = 2y.\ \varphi'(x^2+y^2),$$

откуда

$$py - qx = 0 \tag{24}$$

Уравненіе (24) есть уравненіе съ частными производными любой поверхности вращенія около оси χ. Посмотримъ, каковъ геометрическій смыслъ этого уравненія. Мы знаемъ, что нормаль въ точкѣ (x,y,z) поверхности опредѣляется уравненіями:

$$\frac{\xi - x}{-p} = \frac{\eta - y}{-q} = \zeta - \chi; \qquad (25)$$

потребуемъ, чтобы нормаль пересѣкала ось χ. Въ такомъ случаѣ уравненія (25) должны удовлетворяться для $\xi = 0, \eta = 0$. Подставляя эти значенія въ уравненія (25), имѣемъ:

$$\zeta - z = \frac{x}{p} = \frac{y}{q};$$

слѣдовательно нормаль пересѣкаетъ ось χ въ томъ и только въ томъ случаѣ, если имѣетъ мѣсто равенство $\frac{x}{p} = \frac{y}{q}$ или $py - qx = 0$, которое есть не что иное, какъ уравненіе(24). Итакъ, нормаль поверхности вращенія пересѣкаетъ ось вращенія.

К О Н Е Ц Ъ.

ГЛАВА III.
ТЕОРІЯ ПОВЕРХНОСТЕЙ.

О Г Л А В Л Е Н І Е. Стр.

ВАЖНѢЙШІЯ ИЗЪ ЗАМѢЧЕННЫХЪ ОПЕЧАТОКЪ.

ГЛАВА I.

Стран.	*Строка.*	*Напечатано.*	*Должно быть.*
5	11 снизу	§ 5	§ 3
6	11 сверху	высшаго	высокаго
10	7 сверху	$\frac{\varphi'(\theta_i) + \psi'()t_i)}{R + R'}$	$\frac{\psi'(\theta_i) + \psi'(t_i)}{R + R'}$
11	6 сверху	примѣненіи	измѣненіи
11	3 снизу	$\|\varepsilon\| <$	$\|\varepsilon_i\| <$
16	4 снизу	$x + y$	$x + iy$
22	1 сверху	$y =$	$y' =$
32	6 снизу	$MT = T$	$MT = t$
33	1 сверху	$MN = N$	$MN = n$
38	2 снизу	квадрат-ѣ	квадратурѣ
40	2 снизу	$e^{\kappa\psi}$	$e^{\kappa\lambda}$
41	– – – – – – – – – – – – – –		Черт.15 слѣдуетъ перевернуть
54	7 снизу	§ 2	§ 3
68	2 снизу	казаться	оказаться
73	7 снизу	условія (4)	условія (3)
73	3 снизу	условія (4)	условія (3)
106	4 сверху	безгранично-	безконечно-
118	6 снизу	§ 5	§ 8
127	3 сверху	ω	ω_1
127	6 сверху	$\sin \omega$	$\sin \omega_1$

ГЛАВА II.

169	3 сверху	величина i	величина ε_i
183	14 снизу	Винормаль	Бинормаль
187	12 сверху	осью	осью y
187	3 снизу	$Sx'^4 = x'^2 + y'^2 + z'^2$	$Sx'^2 = s'^2$
208	3 снизу	$-$	$=$

ГЛАВА III.

53	10 снизу	$Q \sin \omega$	$\rho \sin$

О Г Л А В Л Е Н І Е.

ГЛАВА I. Стр.

ГЛАВА II.